Análisis Funcional. Setiembre 2002

1. Si $f_n(x) = ne^{-(nx)^2}$, calcular según los valores de a el límite

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^{+\infty} f_n(x)\ dx \quad .$$

2. Sea $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función medible tal que $yf(y)$ es integrable en $[0,1]$. , Mostrar utilizando el teorema de Fubini que

$$g(x) = \int_x^1 f(y)\ dy$$

es integrable en $[0,1]$, y que se verifica la identidad

$$\int_0^1 g(x)\ dx = \int_0^1 yf(y)\ dy \quad .$$

3. Si $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$, comprobar las siguientes afirmaciones:

(a) $g \in L^q(\mathbb{R})$ para todo $1 \leq q \leq \infty$.

(b) Si $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones que converge hacia otra función f en $L^2(\mathbb{R})$, entonces

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{f_n(x)}{1+x^2}\ dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x)}{1+x^2}\ dx \quad .$$

4. Consideramos en $H = \mathbb{R}^3$ el producto escalar

$$< x, y >= x_1y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3$$

y el subespacio $M = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$.

(a) Hallar una base ortonormal de M.

(b) Hallar la distancia de $(1, 10, 0)$ al subespacio M.

5. Sean $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y $f : X \longrightarrow [0, +\infty)$ una funcion medible. Demostrar que se verifica la desigualdad de Chebyshev,

$$\mu\left(\{\ x \in X : f(x) > n\ \}\right) \leq \frac{1}{n} \int_X f\ d\mu \quad \text{para todo} \quad n \geq 1 \quad .$$