Análisis Funcional. Setiembre 2003

1. Estudiar la integrabilidad en $\mathbb{R}^2$ de la función

$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}(1+x^2+y^2)} \quad .$$

2. Si $F(t) = \int_1^{+\infty} \frac{x+t}{x^3+t} dx$,

(a) Mostrar que F está bien definida en $(0,+\infty)$.
(b) Probar que F es continua en $(0,+\infty)$.
(c) Mostrar que F es derivable en $(0,+\infty)$ y concluir que $F' \geq 0$.
(d) Calcular $\lim_{n\to+\infty} F(n)$.

3. Si

$$f(x,y) = \frac{1}{(1+y)(1+x^2y)}$$

(a) Probar que f es integrable en $(0,+\infty)\times(0,+\infty)$.
(b) Deducir que la función $g(x) = \frac{\log x}{x^2-1}$ es integrable en $(0,+\infty)$ y calcular su integral.

4. Probar que $e^{-x^2} f \in L^1(\mathbb{R})$ si $f \in L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p \leq \infty$, y concluir que

$$\left| \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} f(x)dx \right| \leq \left(\frac{\pi(p-1)}{p} \right)^{\frac{(p-1)}{2p}} \|f\|_{L^p(\mathbb{R})} \quad .$$

5. Enunciar en su caso y desmotrar los siguientes resultados

(a) La desigualdad de Hölder para $p=2$.
(b) $L^2(0,1) \subset L^1(0,1)$, pero no coinciden