ANALISIS FUNCIONAL. Curso 03-04.
6 de Septiembre de 2004.

1. Razonar las respuestas a los siguientes apartados:
(a) Calcular
$$\lim_{n\to+\infty} n^2 \int_0^1 \frac{x \sin x}{1+(nx)^3}\, dx \quad .$$
(b) Mostrar que
$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x/n}}{1+x^2}\, dx = +\infty \quad .$$

2. Sea $\varphi(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(xt)\, dt$ si x está en $\mathbb{R}$.
(a) Mostrar que φ está bien definida en $\mathbb{R}$.
(b) Probar que φ es derivable y verifica en $\mathbb{R}$ la ecuación
$$\varphi'(x) = -\frac{x}{2}\varphi(x) \quad .$$
(c) Mostrar que
$$\varphi(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-x^2} \quad .$$

3. (a) Probar que la función $f(x) = xe^{-\pi x}/\left(1+x^2\right)$ es integrable en $(0,+\infty)$.
(b) Utilizar la identidad
$$\int_0^{+\infty} e^{-xy}\, dy = \frac{1}{x} \quad \text{si} \quad x > 0$$
y el teorema de Fubini para mostrar razonadamente que la fórmula
$$\lim_{R\to+\infty} \int_\pi^R \frac{\cos x}{x}\, dx = -\int_0^{+\infty} \frac{ye^{-\pi y}}{1+y^2}\, dy \quad .$$
es cierta y el límite es finito.

4. Sea
$$Tf(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{1+xy} f(y)\, dy \quad \text{si} \quad x > 0 \quad .$$
Probar que T es un operador lineal y acotado de $L^2(0,+\infty)$ en $L^\infty(0,+\infty)$ que verifica $\|T\| \leq 1$ como operador de $L^2(0,+\infty)$ en $L^\infty(0,+\infty)$.

5. Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ una función.
(a) Demostrar que $\{\ x \in X : f(x) > 2\ \}$ es medible si sabemos a priori que $\{\ x \in X : f(x) > 2 + \frac{1}{n}\ \}$ es medible para todo $n \geq 1$.
(b) Enunciar las condiciones bajo las que se verifica la desigualdad de Chebyshev y demostrarla.