ANÁLISIS FUNCIONAL. setiembre 05

1. • Hallar todos los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que, $x^\alpha e^{-x}$ está en $L^1(0,+\infty)$.
   • Calcular
$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x}}{1+n^2x^2}\, dx \ .$$

2. Sea $f(x,y) = e^{-xy}\sin x$, $N > 0$ y $\Omega_N = (0,N)\times(0,+\infty)$.
   • Mostrar que f está en $L^1(\Omega_N)$.
   • Obtener la fórmula,
$$\int_0^N \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2} - \cos N \int_0^{+\infty} \frac{e^{-Ny}}{1+y^2}\, dy - \sin N \int_0^{+\infty} \frac{ye^{-Ny}}{1+y^2}\, dy \ .$$
   • Deducir que
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2} \ .$$

3. Sea $F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-y^2-\frac{x^2}{y^2}}\, dy$.
   • Mostrar que F es continua en $(0,+\infty)$.
   • Mostrar que F es derivable en $(0,+\infty)$ y hallar una fórmula para su derivada.
   • Con el cambio de variables, $x/y = z$, concluir que $F' = -2F$ y $F(x) = \sqrt{\pi}e^{-2x}/2$ en $(0,+\infty)$.

4. Sea $T(f)(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\sqrt{|x-y|}}{1+(x-y)^2} f(y)\, dy$. Mostrar que T es un operador lineal y acotado de $L^2(\mathbb{R})$ en $L^\infty(\mathbb{R})$ y que su norma, $\|T\|$, verifica la desigualdad, $\|T\| \le 1$.

5. Dar demostraciones razonadas y completas de los siguientes resultados:
   • Si $f \in L^4(\mathbb{R})$ y $g \in L^{\frac{4}{3}}(\mathbb{R})$, entonces $fg \in L^1(\mathbb{R})$.
   • Si $f \in L^1(\mathbb{R})$, entonces
$$\lim_{\lambda\to+\infty} m(\{x\in\mathbb{R} : |f(x)| > \lambda\}) = 0 \ .$$