$X = \{ f : S^1 \to \mathbb{C} : f$ continua en $S^1 \}$

$\cong \{ f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C} : f$ cont en $[-\pi, \pi]$, $f(-\pi) = f(\pi) \}$

$\|f\|_2 = \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}$. Es una norma asociada al producto escalar $X \times X \to \mathbb{C} : (f, g) \rightsquigarrow \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \bar{g}(x) dx$, que es definido positivo

$$\|f\|_2^2 = (f, f).$$

$(X, \|\cdot\|_2)$ es un espacio métrico no completo

$$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt[8]{x^2 + \frac{1}{n}}}$$

$\{f_n\}$ es de Cauchy pero su único límite posible en $(X, \|\cdot\|_2)$ es

$$f(x) = \frac{1}{|x|^{2/8}} = \frac{1}{|x|^{1/4}}$$

que no es continua en $[-\pi, \pi]$.

Otro caso importante: $\{ e^{in\theta}, n \in \mathbb{Z} \}$ es una familia "ortogonal" en X:

$$(e^{in\theta}, e^{im\theta}) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)\theta} d\theta = \frac{1}{i(n-m)} e^{i(n-m)\theta} \Big]_{-\pi}^{\pi} = 0,$$

si $n \neq m$. Además,

$$\mathbb{X} \times \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$(f, g) \leadsto \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\, \bar{g}(\theta)\, d\theta$$

es un "producto escalar" en $\mathbb{X}$ que es definido positivo y

$$\|f\|_2^2 = (f, \bar{f}), \quad \forall f \in \mathbb{X}.$$

Si $\{a_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ es una sucesión de complejos en $\mathbb{C}$ y

$$S_N = \sum_{n=-N}^{N} a_n e^{in\theta}, \quad N \geq 0,$$

$\{S_N\} \subset \mathbb{X}$. Si $0 \leq N_1 < N_2$, $S_{N_2} - S_{N_1} = \sum_{N_1 < |n| \leq N_2} a_n e^{in\theta}$ y

$$\|S_{N_1} - S_{N_2}\|_2^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{N_1 < |k|, |e| \leq N_2} a_k \bar{a}_e e^{i(k-e)\theta} d\theta$$

$$= 2\pi \sum_{N_1 < |n| \leq N_2} |a_n|^2 .$$

Por tanto $\{S_N\}$ es de Cauchy en $(\mathbb{X}, \|\cdot\|_2)$ si $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |a_n|^2 < +\infty$

¿ Quien es el límite de $\{S_N\}$ y dónde ? La respuesta lógica es que el límite sea

$$f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{in\theta}, \quad \theta \in [-\pi, \pi] \qquad (1)$$

¿ Es f una función ? ¿ Tiene sentido tal suma ?

Formalmente, si $f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{in\theta}$, se verificará que

$$(f, e^{ik\theta}) = \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\, e^{-ik\theta}\, d\theta = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-k)\theta}\, d\theta\, a_n = 2\pi a_k .$$

y

$$a_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\, e^{-ik\theta}\, d\theta \quad , k \in \mathbb{Z} \qquad (2)$$

Para tal elección de $\{a_n\}$ ¿converge la serie (1) hacia f en algún sentido?

En los últimos temas veremos que $f \in L^2([-\pi,\pi])$ sii su serie de Fourier (Def: (1) con (2)) verifica

$$\| f - S_N \|^2_{L^2([-\pi,\pi])} = 2\pi \sum_{|k|>N} |a_k|^2 .$$

y

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 d\theta = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |a_n|^2 .$$

Finalmente, existen funciones $f : [-\pi,\pi] \to \mathbb{C}$, tal que

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta)|\, d\theta < +\infty$$

y

$$\lim_{N\to+\infty} | S_N(\theta)| = +\infty , \quad \text{p.c.t. } \theta \in [-\pi,\pi] .$$