Material enviado por Email

M. Cotlar, R. Cignoli. *Functional Analysis*.pdf

W. Rudin. *Real and Complex Analysis*.pdf

W. Rudin. *Functional Analysis*.pdf

H. Brezis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*.pdf

H. Brezis. *Análisis Funcional Teoría y Aplicaciones*.pdf. Una traducción de una edición antigua del anterior libro.

R. Umbrál, M. Domínguez. *Espacios de Banach*.pdf

R. Umbrál, M. Domínguez. *Espacios de Hilbert*.pdf

S. Semmes. *An introduction to some aspects of functional analysis*.pdf

Completar un espacio métrico.pdf

B. Cascales, J.M. Mira, J. Orihuela, M. Raja. *Análisis Funcional*.pdf

El problema de Sturm-Liouville y alternativa de Frdholm para operadores compactos autoadjuntos.pdf

Algunos problemas que haremos en clase y resumen de la teoría desarrollada 3.pdf

Para desplazarse más rápido sobre estos documentos usad lo siguiente:

Sumad 6 en R. Umbrál, M. Domínguez. *Espacios de Banach*.pdf. El índice está en la p. 5.

Sumad 6 en R. Umbrál, M. Domínguez. *Espacios de Hilbert*.pdf. El índice está en la p. 5.

Sumad 13 en W. Rudin. *Real and Complex Analysis*.pdf. El índice está en la p. 6.

Sumad 9 en H. Brezis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*.pdf. El índice está en la p. 8.

Sumad 10 en B. Cascales, J.M. Mira, J. Orihuela, M. Raja. *Análisis Funcional*.pdf. El índice está en la p. 9.

Sumad 13 en D. Gilbarg, N.S. Trudinger. Elliptic Partial Differential Equations of Second Order.pdf. El índice está en la p. 8.

Teoría explicada en clase

Capítulo 1º de R. Umbrál, M. Domínguez. *Espacios de Banach*.pdf. Secciones 3, 4 y 5. Aquí hemos obviado todas las demostraciones y ejercicios excepto por la existencia de las bases de Hamel, que hemos demostrado utilizando el Lema de Zorn.

Capítulo 2º de R. Umbrál, M. Domínguez. *Espacios de Banach*.pdf. Secciones 1, 2, 3, 4 y 5.

Capítulo 3º de R. Umbrál, M. Domínguez. *Espacios de Banach*.pdf, teoremas 3.22, 3.28, 3.34 y 3.36. Los dos primeros son los teoremas de Stone-Weierstrass (casos real y complejo) y los siguientes se reducen al teorema de Ascoli-Arzelá. Hemos dado por supuesto que conocéis de cursos anteriores los teoremas de Stone-Weierstrass y de Ascoli-Arzelá.

Capítulo 4º de R. Umbrál, M. Domínguez. *Espacios de Banach*.pdf. Secciones 1, 2, 3, 4 y 5.

Capítulo 5º de R. Umbrál, M. Domínguez. *Espacios de Banach*.pdf. Secciones 1 y 2.

Capítulo 6º de R. Umbrál, M. Domínguez. *Espacios de Banach*.pdf. La definición en la p. 93 y las secciones 2 y 3.

Capítulo 1º de R. Umbrál, M. Domínguez. *Espacios de Hilbert*.pdf. Secciones 1, 2 y 3.

Capítulo 2º de R. Umbrál, M. Domínguez. *Espacios de Hilbert*.pdf. Secciones 1, 2, 3 y 4.

Duales de los espacios L^p para $1 \leq p < \infty$

1. Leed la definición de $(X, \mathcal{M}, \mu)$ en la p. 97 de H. Brezis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*.pdf.

2. Leed el teorema 4.11 en la p. 105 de H. Brezis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*.pdf: teorema de representación de Riesz para el dual de $L^p(X, \mathcal{M}, \mu)$, si $1 < p < \infty$, con μ una medida σ-finita.

3. Leed el teorema 4.14 en la p. 107 de H. Brezis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*.pdf: teorema de representación de Riesz para el dual de $L^1(X, \mathcal{M}, \mu)$ con μ una medida σ-finita.

4. También podéis encontrar en el teorema 6.16 en la p. 140 de W. Rudin. *Real and Complex Analysis*.pdf un enunciado análogo para los resultados descritos en los apartados 1. y 2 anteriores. Allí, X denota una espacio de medida $(X, \mathcal{M}, \mu)$ con μ una medida σ-finita sobre la σ-álgebra $\mathcal{M}$.

Duales de l_∞ y L^∞

1. Hemos mostrado que $l_1^* = l_\infty$ y que $l_1 \subsetneq l_\infty^*$. Para ver que el contenido es estricto hemos extendido por Hahn-Banach a l_∞ la función lineal $f : c \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que $f(x) = \lim_{n\to\infty} x_n$, si $x \in c$ y observado que $f \neq f_y$, para toda $y \in l_1$, donde $f_y(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n \overline{y_n}$.

2. Leed el Remark 7 en la p. 110 de H. Brezis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*.pdf. Os convencerá de que una primera descripción del dual de $L^\infty(X, \mathcal{M}, \mu)$ requiere conocer más Análisis Funcional y Topología abstracta.

2. Hemos visto que $L^1(0,1) \subsetneq L^\infty(0,1)^*$. Una situación análoga a la que ocurre entre l_1 y l_∞^*; es decir, $l_1 \subsetneq l_\infty^*$. En general, también es cierto que $L^1(X, \mathcal{M}, \mu) \subsetneq L^\infty(X, \mathcal{M}, \mu)^*$. Cuando $X = K$ en $\mathbb{R}^n$ y $0 \in K$, extended por Hahn-Banack a $L^\infty(K)$ la función lineal acotada $\Lambda : C(K) \longrightarrow \mathbb{C}$, tal que $\Lambda(\varphi) = \varphi(0)$, si $\varphi \in C(K)$. Es fácil ver que $\Lambda \neq \Lambda_g$, para toda $g \in L^1(K)$, donde $\Lambda_g(f) = \int_K f(x)\overline{g}(x)\, dx$.

3. Es interesante lo que explican las páginas 21-23 de S. Semmes. *An introduction to some aspects of functional analysis*.pdf. Los que queráis leer estas páginas encontraréis en ellas una descripción satisfactoria del dual de $L^\infty(X, \mathcal{M}, \mu)$. Advierto que para mi gusto estas páginas no están bien redactadas.

Duales de $C_0(X)$ y de $C(X)$ con $X = \Omega$ o K

1. Seguimos la notación en W. Rudin. *Real and Complex Analysis*.pdf, donde X denota un espacio Hausdorff localmente compacto; ejemplos son $X = K$, un compacto de $\mathbb{R}^n$ o $X = \Omega$ un abierto de $\mathbb{R}^n$.

$C_b(X)$ denota el espacio de las funciones continuas y acotadas sobre X con valores en el plano complejo, dotado con la norma del supremo

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

$C_b(X)$ es un espacio normado de Banach, como lo es $C(K)$.

2. Ved la definición 2.9 de $C_c(X)$ en la p. 51 de W. Rudin. *Real and Complex Analysis*.pdf.

3. Ved la definición 3.16 de $C_0(X)$ y el teorema 3.17 en la p. 83 de W. Rudin. *Real and Complex Analysis*.pdf. Observad, que si $X = K$, entonces $C_c(K) = C_0(K) = C(K) = C_b(K)$.

4. Leed las definiciones en las pág. 129 y 130 de W. Rudin. *Real and Complex Analysis*.pdf (la introducción del capítulo 6), el teorema 6.2 en la p. 130, el teorema 6.4 en la p. 131, las definiciones 6.5 y 6.6 en la p. 132, el teorema 6.12 en la p. 137 y el 6.13 en la p. 138.

5. Finalmente, leed las definiciones en 6.18 y el teorema 6.19 en las pág. 142 y 143.

6. La razón final por la que hemos necesitado mencionar las definiciones y teoremas anteriores es el siguiente resultado que también se conoce como teorema de representación de Riesz (otra versión…):

Theorem 1 (Teorema de representación de Riesz)**.** *Si $X = \Omega$ o $X = K$ en $\mathbb{R}^n$, el dual de $C_0(X)$ es $\mathcal{M}(X)$, donde $\mathcal{M}(X)$ es el espacio vectorial de todas las medidas complejas $\mu : \mathcal{B}_X \longrightarrow \mathbb{C}$, con norma $\|\mu\| = |\mu|(X)$, con $|\mu|$ la variación total de μ y $\mathcal{B}_X$ la σ-álgebra de Borel en X. En particular, la aplicación*

$$\mathcal{M}(X) \longrightarrow C_0(X)^*, \ \mu \rightsquigarrow \Lambda_\mu,$$

tal que

$$\Lambda_\mu(f) = \int_X f(x)\, d\mu(x), \quad si\ f \in C_0(X),$$

es una correspondencia lineal, biyectiva e isométrica entre $\mathcal{M}(X)$ y $C_0(X)^*$.

Ejemplos de espacios normados no separables

Hemos mostrado que l_∞ y $L^\infty(0,1)$ son espacios no separables. En general, tampoco $L^\infty(K)$ o $L^\infty(\Omega)$ son separables como se puede verificar con construcciones similares. Sin embargo, l_p, $L^p(0,1)$, $L^p(K)$ y $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < +\infty$, son todos separables.

Que l_∞ y $L^\infty(0,1)$ no son separables es consecuencia de que las familias $\{x \in l_\infty : x_n = 0 \text{ o } 1, \text{ para todo } n \geq 1\} \subset l_\infty$ y $\{\chi_{(0,a)} : 0 < a < 1\} \subset L^\infty(0,1)$ tienen el cardinal del continuo y la distancia entre dos elementos distintos de la misma familia en l_∞ y $L^\infty(0,1)$ es respectivamente mayor o igual que 1.

Otro espacio de Banach no separable es $C^\alpha([0,1])$, $0 < \alpha \leq 1$, el espacio de las funciones Hölder con exponente α en $[0,1]$ con la norma

$$\|f\| = \|f\|_{L^\infty([0,1])} + \sup_{t \neq s} \frac{|f(t) - f(s)|}{|t-s|^\alpha}.$$

La familia de funciones $\{f_a : 0 < a \leq 1\}$ con $f_a(x) = \max\{0, x-a\}^\alpha$, tiene el cardinal del continuo y $\|f_a - f_b\| \geq 1$ si $a \neq b$, porque

$$\frac{|\left(f_a - f_b\right)(b) - \left(f_a - f_b\right)(a)|}{|b-a|^\alpha} = 1,$$

si $a < b$.

Espacios reflexivos

Si $(X, \|\cdot\|)$ es una espacio normado, la aplicación

$$i : X \longrightarrow X^{**}/x \rightsquigarrow i_x, \text{ tal que } i_x(\Lambda) = \Lambda(x), \text{ si } \Lambda \in X^*, \tag{0.1}$$

es lineal, continua y por el teorema de Hahn-Banach

$$\|x\|_X = \|i_x\|_{X^{**}}, \text{ para todo } x \in X. \tag{0.2}$$

Para verificar (0.2), recordad que

$$\begin{aligned}\|i_x\|_{X^{**}} &= \sup\{|i_x(\Lambda)| : \Lambda \in X^*, \ \|\Lambda\| \leq 1\} \\ &= \sup\{|\Lambda(x)| : \Lambda \in X^*, \ \|\Lambda\| \leq 1\}\end{aligned}$$

y que por un corolario del teorema de Hahn-Banach, si $x \in X$ existe un $\Lambda \in X^*$ con $\|\Lambda\| \leq 1$, tal que $\Lambda(x) = \|x\|$. Por tanto, i en (0.1) es siempre una isometría lineal inyectiva de X en X^{**}.

Definition 1. Una espacio de Banach X se dice reflexivo si la transformación lineal i definida en (0.1) es sobreyectiva; es decir, una isometría lineal biyectiva entre X y X^{**}.

En relación con el problema (5) en

Capítulo 2º de R. Umbrál, M. Domínguez. *Espacios de Hilbert*.pdf,

si H es un espacio de Hilbert y por el teorema de representación de Riesz para espacios de Hilbert, la aplicación $\psi : H \longrightarrow H^*$, tal que $y \rightsquigarrow \psi_y$, donde $\psi_y(x) = \langle x, y\rangle$ si $x \in H$, es una isometría biyectiva lineal conjugada. Ello permite dotar a H^* de estructura de espacio de Hilbert definiendo en $H^* \times H^*$ el producto escalar

$$\langle \psi_{y_1}, \psi_{y_2}\rangle_{H^*} = \langle y_2, y_1\rangle, \text{ si } \psi_{y_1}, \psi_{y_2} \in H^*, \tag{0.3}$$

que genera la norma en H^*; es decir,

$$\|\psi_y\| = \sqrt{\langle \psi_y, \psi_y\rangle_{H^*}}, \text{ si } \psi_y \in H^*.$$

De forma análoga, $\varphi : H^* \longrightarrow H^{**}$, tal que $\Lambda \rightsquigarrow \varphi_\Lambda$, donde

$$\varphi_\Lambda(\psi_x) = \langle \psi_x, \Lambda\rangle_{H^*}, \text{ si } \psi_x \in H^*,$$

es una isometría biyectiva lineal conjugada. Es fácil comprobar que i en (0.1) con $X = H$ coincide con $\varphi \circ \psi$. Finalmente, la composición de dos isometrías biyectivas lineales conjugadas da lugar a una isometría biyectiva lineal, lo que implica que todo espacio de Hilbert H es reflexivo.

Otros ejemplos de espacios de Banach reflexivos son $L^p(X, \mathcal{M}, \mu)$ si $1 < p < \infty$ con $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida σ-finita, lo que se sigue del teorema de representación de Riesz para el dual de $L^p(X, \mathcal{M}, \mu)$; es decir, $L^p(X, \mathcal{M}, \mu)^* \approx L^{p'}(X, \mathcal{M}, \mu)$ porque la transformación

$$\Gamma : L^{p'}(X, \mathcal{M}, \mu) \longrightarrow L^p(X, \mathcal{M}, \mu)^*, \text{ tal que } g \rightsquigarrow \Gamma_g,$$

con

$$\Gamma_g(f) = \int_X f\overline{g}\, d\mu,$$

es una isometría biyectiva lineal conjugada, y con un razonamiento similar al que hemos utilizado para mostrar que todo espacio de Hilbert es reflexivo; utilizando dos veces el anterior teorema de representación de Riesz.

Los espacios l_p, con $1 < p < \infty$ son también reflexivos. Para comprobarlo, utilizad las mismas ideas y que $l_p^* \approx l_{p'}$, si $1 \leq p < \infty$.

Sin embargo, l_1 y $L^1(\Omega)$ no son espacios reflexivos, pues sus duales son respectivamente l_∞ y $L^\infty(\Omega)$, y los duales de estos últimos son más grandes que l_1 y $L^1(\Omega)$ respectivamente; es decir, la inmersión i en (0.1) no es sobreyectiva si X es l_1 o $L^1(\Omega)$.

Definition 2. Una sucesión $\{x_n\}$ en un espacio normado X converge débilmente hacia $x \in X$ si $\lim_{n\to+\infty} \Lambda(x_n) = \Lambda(x)$, para todo Λ en X^*.

Definition 3. Una sucesión $\{\Lambda_n\}$ en X^* converge débil-$*$ hacia $\Lambda \in X^*$ si $\lim_{n\to+\infty} \Lambda_n(x) = \Lambda(x)$, para todo x en X^*.

Las convergencias anteriores son más débiles que las convergencias en norma; es decir, si $\{x_n\}$ o $\{\Lambda_n\}$ convergen en norma hacia x o Λ en X o X^*, entonces $\{x_n\}$ o $\{\Lambda_n\}$ convergen débil o débil-$*$ hacia x o Λ respectivamente.

El recíproco es falso ya que por el Lema de Riemann-Lebesgue, la sucesión $\{e^{inx}\}$ converge débilmente a cero en $L^p([-\pi,\pi])$, si $1 \leq p < \infty$; también converge débil-$*$ a cero en $\mathcal{M}([-\pi,\pi]) = C([-\pi,\pi])^*$ y en $L^\infty(-\pi,\pi) = L^1(-\pi,\pi)^*$, pero no converge en norma a cero en ninguno de estos espacios. Para verlo observad que

$$\|e^{inx}\|_{L^p(-\pi,\pi)} = (2\pi)^{\frac{1}{p}}, \text{ si } 1 \leq p \leq \infty$$

y la variación total de las medidas $e^{inx}\,dx$ en $[-\pi,\pi]$ es la medida de Lebesgue con norma 2π en $\mathcal{M}([-\pi,\pi])$.

Theorem 2 (Banach-Alaoglu para espacios reflexivos)**.** *Sea X un espacio de Banach reflexivo. Entonces, toda sucesión acotada $\{x_n\}$ en X tiene una sub-sucesión $\{x_{n_k}\}$, $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$, que converge débilmente hacia algún x en X; es decir,*

$$\lim_{k\to+\infty} \Lambda(x_{n_k}) = \Lambda(x), \text{ para todo } \Lambda \in X^*.$$

Theorem 3 (Teorema de Banach-Alaoglu)**.** *Sea X un espacio normado de Banach. Entonces, toda sucesión acotada $\{\Lambda_n\}$ en X^* tiene una sub-sucesión $\{\Lambda_{n_k}\}$, $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$, que converge débil-$*$ hacia algún Λ en X^*; es decir,*

$$\lim_{k\to+\infty} \Lambda_{n_k}(x) = \Lambda(x), \text{ para todo } x \in X.$$

El teorema 3 implica el teorema 2 porque todo espacio reflexivo X es linealmente isométrico a X^{**}; es decir, coincide con el dual de X^*.

En particular, todo espacio de Hilbert H es reflexivo y si $\{x_n\}$ es una sucesión acotada en H, existen $n_1 < n_2 < \ldots < n_k \ldots$ y x en H tales que la subsucesión $\{x_{n_k}\}$ verifica

$$\lim_{k\to+\infty} \langle x_{n_k}, y\rangle = \langle x, y\rangle, \text{ para todo } y \in H.$$

Este resultado muestra junto con los ejemplos anteriores lo que es el sustituto adecuado del Teorema de Heine-Borel en espacios normados de dimensión finita en el contexto de espacios normados de dimensión infinita:

¡Lo mejor que podemos decir de una sucesión acotada en X^* en cuanto a tener sub-sucesiones que converjan de alguna forma, es lo que dicen los teoremas 2 y 3 cuando X tiene dimensión infinita!

Además, muchos espacios normados interesantes son los duales o están contenidos en el dual de otro espacio normado; como es el caso de $L^p(\Omega)^\star = L^{p'}(\Omega)$, si $1 \leq p < \infty$ y de $L^1(K) \subsetneqq \mathcal{M}(K) = C(K)^*$, por el Teorema 1 de representación de Riesz.

Podéis encontrar información sobre el teorema de Banach-Alaoglu en la sección 3.15, titulada Compact Convex Sets, pág. 85 de W. Rudin. *Functional Analysis*.pdf. El libro B. Cascales, J.M. Mira, J. Orihuela, M. Raja.

Análisis Funcional.pdf, llama a este teorema de Alaoglu-Bourbaki. Ved teorema 3.8.14 en pág. 326 pero su presentación me parece más complicada.

Otro resultando que encontraréis en muchos libros de Análisis Funcional que he mencionado varias veces en clase es el siguiente:

Theorem 4 (Teorema de la aplicación abierta)**.** *Sean X e Y espacios de Banach y $T : X \longrightarrow Y$ una aplicación lineal, acotada y sobreyectiva. Entonces, existe un $\delta > 0$ tal que*

$$B(0,\delta) \subset T(B(0,1)). \tag{0.4}$$

La condición de que T sea sobreyectiva es necesaria porque la transformación lineal nula Λ de X en Y es lineal y acotada, no sobreyectiva y su imagen de la bola unidad en X no contiene una bola en Y cuando $Y \neq \{0\}$.

(0.4) y la linealidad de T implican que T es una función abierta de X en Y; es decir, que la imagen de toda bola abierta en X es un abierto en Y. En particular, si T es biyectiva, su inversa que es claramente lineal, es también continua y acotada de Y en X.

Una demostración de este teorema está en la p. 112 de W. Rudin. *Real and Complex Analysis*.pdf

Teoría espectral para operadores compactos autoadjuntos

Sobre este tema lo explicado en clase está en el capítulo 2 de B. Cascales, J.M. Mira, J. Orihuela, M. Raja. *Análisis Funcional*.pdf.

En particular, recomiendo leer los siguientes resultados del capítulo en el orden indicado: el Ejemplo 2.1.1 y sus apartados (i), (ii), (iii), (iv), (v), la Prop. 2.1.2, la Definición 2.1.3, la Proposición 2.1.4, la Definición 2.2.1, la Definición 2.2.2, la Definición 2.2.3, el Teorema 2.2.4, el Corolario 2.2.5 y el Teorema 2.2.6, la primera parte de la Proposición 2.2.7 - aquí olvidad la segunda parte de la proposición porque no la necesitáis y su demostración no es clara o correcta - la Proposición 2.2.8, la Proposición 2.3.1, la Proposición 2.3.2, la Definición 2.3.3, la Proposición 2.3.4, del Ejemplo 2.3.5 leed los apartados (i) al (ix), la Definición 2.3.6, la Proposición 2.3.7, el Ejemplo 2.3.8 y todos sus apartados, la Definición 2.3.9, la Proposición 2.3.10, el Ejemplo 2.3.11, la Proposición 2.3.14, la Proposición 2.3.15, la Definición 2.4.1, la Proposición 2.4.2, la Proposición 2.4.4, el Corolario 2.4.5, el Corolario 2.4.6, el Ejemplo 2.4.7 y sus apartados (i), (iii), (iv), (v), el teorema Teorema 2.5.1, la Proposición 2.5.2, el Corolario 2.5.3, la Proposición 2.5.4, el Teorema 2.2.5, el Corolario 2.5.6 y el Teorema 2.5.7.

Quienes quieran aprender una aplicación de este tema al problema de Sturm-Liouville asociado al problema de contorno

$$\begin{cases} \frac{d^2v}{d^2t} + \rho(t)v = -f(t), \text{ en } [0,1], \\ v(0) = v(1) = 0, \end{cases}$$

con $\rho \in C([0,1])$, leed desde las págs. 2-9 en *El problema de Sturm-Liouville y alternativa de Fredholm para operadores compactos autoadjuntos*.pdf a partir de la fórmula (3) en la p. 2 y olvidando lo anterior.

Problemas que haremos en clase

De cada relación de problemas elegid 4 y entregadlos resueltos por escrito el 14/1/16 al final del examen. Las hojas deberán estar agrupadas y grapadas por relación, llevarán vuestro nombre, apellidos y una identificación clara de la relación a la que corresponden en la primera hoja de cada grupo.

1ª : 2, 5, 7, 12, 13, 14, 15, 16, 21, 24, 25, 26, 28, 31, 32, 33, 34, 35, 37 (Capítulo 2º de R. Umbrál, M. Domínguez. *Espacios de Banach*.pdf entre las págs. 39 y 44)

2ª : 1, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 14 (Capítulo 4º de R. Umbrál, M. Domínguez. *Espacios de Banach*.pdf entre las págs. 79 y 82)

3ª : 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10 (Capítulo 5º de R. Umbrál, M. Domínguez. *Espacios de Banach*.pdf entre las págs. 95 y 98)

4ª : 1, 2, 4, 5, 6, 7 (Capítulo 6º de R. Umbrál, M. Domínguez. *Espacios de Banach*.pdf entre las págs. 107 y 108), 11 (Capítulo 5º de W. Rudin. *Real and Complex Analysis*.pdf, p. 126), 1.9, 1.11 (Capítulo 1º de B. Cascales, J.M. Mira, J. Orihuela, M. Raja. *Análisis Funcional*.pdf en la pág. 137)

5ª : 1 ((a), (b), (c), (e) y (d)), 2, 4, 5, 6 (haced sólo el caso real), 7, 10, 12, 13, 14, 15, 16 (Capítulo 1º de R. Umbrál, M. Domínguez. *Espacios de Hilbert*.pdf entre las págs. 19 y 22)

6ª : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11 (Capítulo 2º de R. Umbrál, M. Domínguez. *Espacios de Hilbert*.pdf entre las págs. 35 y 36), 14, 15 (Capítulo 4º de W. Rudin. *Real and Complex Analysis*.pdf entre las págs. 106 y 107), 1.20, 1.29, 1.33, 1.46 (Capítulo 1º de B. Cascales, J.M. Mira, J. Orihuela, M. Raja. *Análisis Funcional*.pdf entre las págs. 138 y 143)

7ª: 2.1, 2.3, 2.5, 2.7, 2.13 (Capítulo 2º de B. Cascales, J.M. Mira, J. Orihuela, M. Raja. *Análisis Funcional*.pdf entre las págs. 227 y 236)

Algunas ayudas sobre problemas que no haremos en R. Umbrál, M. Domínguez. ***Espacios de Banach*****.pdf**

Capítulo 1

Los ejercicios de este capítulo conducen a demostrar que todas las bases de Hamel de un espacio vectorial tienen el mismo cardinal. Los interesados tendrán que utilizar ideas que podéis encontrar en el libro M. Cotlar, R. Cignoli. *Functional Analysis*.pdf

Capítulo 2

(39) Leed antes *Completar un espacio métrico*.pdf

Capítulo 5

(11) Ved la solución en

https://mathproblems123.wordpress.com/2011/01/04/separable-spaces/

(13) Ved la solución en:

http://homepages.math.uic.edu/ furman/4students/Banach-LIM.pdf

y observad que M_0 en el problema (13) coincide con el subespacio W en esta página web.

Capítulo 6

(3) Ved: una base de Haar de $L^2(0,1)$ en

http://math.stackexchange.com/questions/325739/haar-basis-on-l20-1-proof

e integrar el resultado. Este problema es duro y aconsejo que no lo intentéis.

Algunas ayudas sobre problemas que no haremos en R. Umbrál, M. Domínguez. ***Espacios de Hilbert*****.pdf**

Capítulo 1

(8) (9) y (11) Están hechos en clase de teoría.

(14) Utilizad simetrías y cambios de variable.

Capítulo 2

(3) Es una consecuencia trivial del ejercicio anterior.

(9) y (10) Ved

http://math.stackexchange.com/questions/232166/showing-the-basis-of-a-hilbert-space-have-the-same-cardinality

(2) (6) (7) y (11) Están hechos en clases de teoría.