

Análisis Matemático II
Junio 2001

1. Resolver las siguientes preguntas:

- a. Calcular la parte real e imaginaria de $(3 + 2i)^{-2}$.
- b. Calcular i^{503} .
- c. Resolver $\sin z = 3$.
- d. ¿Existe una función analítica $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $f'(z) = \bar{z}$ para todo z en \mathbb{C} ? (Razonar la respuesta)

2. Resolver las siguientes preguntas:

- a. ¿Para qué valores reales de a y b es analítica la siguiente función ?

$$f(z) = \sin(e^{ax} \cos(by)) \cosh(e^{ax} \sin(by)) + i \cos(e^{ax} \cos(by)) \sinh(e^{ax} \sin(by)) \quad .$$

- b. Si a y b son tales que f es analítica, encontrar los ceros de f en el plano complejo.

3. Dada la serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \cos(in) z^n \quad ,$$

- a. Hallar su radio de convergencia R .
- b. Comprobar que la serie coincide en el disco $|z| < R$ con la función racional

$$f(z) = \frac{2e - (1 + e^2)z}{2(ez^2 - (1 + e^2)z + e)} \quad .$$

- c. Hallar el desarrollo de Laurent de $f(z)$ en los anillos $\frac{1}{e} < |z| < e$ y $|z| > e$.

4. Calcular la integral compleja

$$\int_{|z-1|=\frac{1}{2}} z e^{\frac{1}{z-1}} dz \quad .$$

5. Calcular la integral

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)} \quad , \quad a \text{ y } b > 0.$$