Análisis Matemático II
Junio 2002

1. Resolver las siguientes preguntas:

(1) Calcular las partes real e imaginaria de $(1-i)^{4i}$.
(2) Calcular las partes real e imaginaria de las soluciones de $\sin z = 2$.
(3) Determinar la imagen del rectángulo $Q = [\log 2, \log 3] \times [-\pi, \pi]$ bajo la acción de la función exponencial $f(z) = e^z$.

2. Dada la función $v(x, y) = x^3 - 3axy^2$, se pide:

(1) ¿Para qué valores del parámetro a la función anterior es armónica?.
(2) Encontrar la función $u(x, y)$ armónica conjugada de la anterior función armónica $v(x, y)$.
(3) ¿Cuál es la función analítica $f(z) = u + iv$ de la cual son, respectivamente, su parte real e imaginaria?.
(4) Encontrar los vectores tangentes a las curvas $u = cte.$ y $v = cte.$ ¿En qué región son estos vectores ortogonales?. ¿En qué región estos vectores están definidos?.
(5) Sea $f(z) = u+iv$. Como u y v son armónicas, también lo es $u+v$. Encontrar en términos de $f(z)$ la función $g(z)$ cuya parte real sea $u + v$.

3. Si a y m son números positivos calcular la integral

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(mx)}{x(x^2 + a^2)}\, dx \quad .$$

4. Calcular los desarrollos de Laurent de $f(z) = \frac{1}{z(z^2-1)}$ en los anillos $0 < |z-1| < 1$ y $1 < |z-1| < 2$.

5. Dada la curva en el espacio tridimensional $r(t) = \cos t\, e_1 + \sin t\, e_2 + \frac{t^2}{2}\, e_3$, se pide:

(1) Determinar la ecuación cartesiana de la curva.
(2) Determinar los vectores unidad tangente, normal principal y binormal en cualquier punto de la curva. ¿Están siempre definidos?
(3) Calcular la curvatura y la torsión en cualquier punto. ¿Dónde es la curvatura máxima? ¿Dónde se anula la torsión? ¿Cuánto vale el radio de la circunferencia osculatriz en el punto en que se anula la torsión?
(4) Encontrar la ecuación paramétrica y cartesiana de la recta tangente a la curva en el punto $t = \pi/2$.
(5) Expresar la ecuación cartesiana de la familia de planos normales a la curva.