

**ANALISIS MATEMATICO II. Curso 03-04.**  
**2 de Junio de 2004.**

1. (a) Calcular y representar gráficamente en el plano complejo las soluciones de la ecuación

$$(z - 1)^4 = \frac{16 + 16i}{\sqrt{2}} .$$

- (b) Calcular las partes real e imaginaria de todos los valores posibles de  $(ai)^i$  si  $a$  es un número real distinto de cero.

- (c) Mostrar que

$$\left( \frac{1 + i \tan 2}{1 - i \tan 2} \right)^n = \frac{1 + i \tan (2n)}{1 - i \tan (2n)} \quad \text{si } n = 1, 2, 3 \dots$$

- (d) Calcular la imagen de la región

$$\left\{ z \in \mathbb{C} : 8 \leq |z| \leq 27, -\frac{3\pi}{4} \leq \arg z \leq 0 \right\}$$

bajo la acción de la rama principal de  $\sqrt[3]{z}$  en  $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ .

2. Sea  $u(x, y) = xy + (e^y + e^{-y}) \cos x$ .

- (a) Mostrar que  $u$  es armónica.

- (b) Hallar todas las armónicas conjugadas de  $u$ .

- (c) Hallar una función analítica  $f(z)$  expresada en términos de  $z$  y tal que  $\Re f(z) = u(x, y)$ ,  $f(0) = 2 + i$ .

3. (a) Determinar y clasificar las posibles singularidades de  $f(z) = \frac{1}{z^2 \sinh z}$ .

- (b) Hallar la parte singular del desarrollo de Laurent de  $f$  en potencias de  $z$  en un anillo  $0 < |z| < R$ . ¿Cuál es el valor de  $R$ ?

- (c) Calcular

$$\int_{|z|=1} f(z) dz \quad \text{y} \quad \int_{|z|=5} f(z) dz .$$

4. Calcular

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x(x^6 + 1)} dx .$$

5. Sea  $\mathbf{r}(t)$  la curva parametrizada  $\mathbf{r}(t) = \frac{4}{5} \cos t \mathbf{i} + (1 - \sin t) \mathbf{j} - \frac{3}{5} \cos t \mathbf{k}$ .

- (a) Calcular la tangente, normal, binormal, la curvatura y la torsión en  $\mathbf{r}(t)$ .

- (a) ¿Es la curva plana?. En caso afirmativo, hallar la ecuación del plano que la contiene.