Análisis Matemático II
Septiembre 2002

1. Resolver las siguientes preguntas:

(1) Hallar todas las soluciones de la ecuación $(e^z+1)^3+8=0$.
(2) Calcular todos los valores posibles de $(\cos i)^i$.
(3) Calcular el argumento principal del complejo $e^{it}+1$ si $t \in (-\pi, \pi)$.

2. Resolver las siguientes preguntas:

(1) Encontrar todos los polinomios armónicos de la forma

$$u(x,y) = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3 \quad .$$

(2) Calcular una función $v(x,y)$ para la que $u(x,y)+iv(x,y)$ sea entera.

3. Resolver las siguientes preguntas:

(1) Calcular el desarrollo en serie de potencias centrada en $z=1$ de la función $\log(1+z)$ y hallar su radio de convergencia.
(2) Determinar el dominio de holomorfía y clasificar todas las singularidades de la función $f(z) = \frac{(z-1)(z-2)^3}{\sin^3(\pi z)}$. Calcular el residuo en $z=2$.
(3) Hallar el desarrollo de Laurent de $f(z) = \frac{1}{(z^2-1)^2}$ en $0 < |z-1| < 2$.

4. Aplicar el teorema de Cauchy-Goursat a la función $f(z) = e^{-z^2}$ en el dominio $|x| \leq R$, $0 \leq y \leq 1$ y calcular la integral

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos(2x) dx \quad .$$

Para este problema es útil recordar que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

5. Encontrar la curvatura de la elipse $x(t) = a\cos t$, $y(t) = b \sin t$ si $a \neq b$, a y $b > 0$. Encontrar los puntos en los que la curvatura es máxima o mínima. ¿Cuánto vale la curvatura máxima?