

**Análisis Matemático II**  
**Septiembre 2003**

1. Resolver las siguientes preguntas:

- (1) Sea  $f$  analítica en  $|z| < 2$ . Calcular en términos de  $f$  y sus derivadas la integral

$$\int_{|z|=1} \left(z + 2 + \frac{1}{z}\right) \frac{f(z)}{z} dz .$$

- (2) Hallar las soluciones de  $1^z = 2i$ .  
(3) Calcular el anillo de convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{z^n}{n^2} + \frac{n^2}{(2z)^n} \right) .$$

2. (1) Encontrar todas las funciones armónicas  $v$  de dos variables de la forma  $v = \phi(xy)$ .

(2) Encontrar las funciones analíticas  $f(z)$  que tienen por parte imaginaria las funciones  $v$  anteriormente halladas.

3. Sea  $f(z) = \frac{\log(1+z)-z}{z^m}$  con  $m = 1, 2, 3, \dots$ . Analizar y clasificar las posibles singularidades y calcular el residuo de  $f$  en  $z = 0$  para cada valor de  $m \in \mathbb{N}$ .

4. Calcular la integral

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx .$$

5. Dada la superficie parametrizada  $S$

$$r(u, v) = u \cos v e_1 + u \sin v e_2 + u e_3 \quad , \quad 0 \leq v < 2\pi \quad , \quad 0 < u < +\infty$$

- (1) Hallar la ecuación cartesiana y mostrar que  $S$  coincide con un cono con vértice en el origen cuyo semiángulo con el eje es  $\pi/4$ .  
(2) Encontrar los puntos de  $S$  donde el plano tangente es paralelo al plano  $z - x = 0$  y calcular el plano tangente en esos puntos.  
(3) Calcular las curvaturas media, Gaussiana y las curvaturas principales en cada punto de  $S$ .  
(4) Calcular el área de la parte de  $S$  situada bajo el plano  $z = 1$ .