Análisis Matemático II

Examen final Septiembre 2004

1. Encontrar todas las soluciones de las ecuaciones:
(a) $2z^4 + 1 - \sqrt{3}i = 0$.
(b) $\cosh z - \sinh z = 1$.
(c) $e^{(z-1)^2} = 1$.
(d) Sea $f(z)$ la rama de $\sqrt{z}$ que es analítica en el dominio $D = \mathbb{C} - \{z = -iy,\ y \geq 0\}$ y tal que $f(1) = -1$. Calcular $f(-1)$ y $f(2i)$.

2. Encontrar el desarrollo en serie alrededor del punto $z_0 = 0$ de la función $f(z)$ que satisface las condiciones $f(0) = 0$, $f'(0) = i$ y la ecuación diferencial $f''(z) + i^2 f(z) = 0$. ¿De qué función se trata?

3. Sea la función

$$u(x,y) = e^{x^2-y^2} \cos(2xy)$$

(a) Verificar que satisface la ecuación de Laplace $\nabla^2 u = 0$ en $\mathbb{R}^2$.
(b) Como parte real de una función analítica, buscar todas sus armónicas conjugadas.
(c) Expresar en términos de z la función $f(z) = u + iv$, tal que $f(0) = 1$.

4. Calcular la integral

$$I = \int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+a^2)^5}, \qquad a > 0.$$

5. La curva plana

$$\boldsymbol{r}(t) \equiv t\boldsymbol{e}_1 + \cosh t\boldsymbol{e}_2,$$

recibe el nombre de catenaria, pues corresponde a la figura que adopta una cadena o hilo, colgada de sus extremos. Calcular:
(a) El vector unidad tangente y el vector normal principal.
(b) Su curvatura.
(c) ¿Dónde es su curvatura máxima?
(d) Su evoluta.