Notas de EDP

J. Duoandikoetxea - L. Escauriaza

9 de febrero de 2018

Capítulo 1

Introducción

1.1. ¿Qué son las EDP's?

Una EDP es una ecuación con una incógnita u que es función de $x = (x_1, \dots, x_n)$, a la que se pide que satisfaga

$$F(x, u, Du, D^2u, \dots, D^m u) = 0.$$

Aquí $D^j u$ representa todas las derivadas de u de orden j y

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}, \ |\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i, \text{ si } \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n.$$

Terminología

Orden de la ecuación. Es el mayor orden de derivación de u que aparece en la ecuación.

Ecuación lineal. Aquella en la que los términos en los que aparecen u o sus derivadas son lineales.

Todas las ecuaciones que estudiamos con detalle en el curso son lineales y de orden menor que tres.

Ecuación cuasilineal. La misma definición que la anterior pero ahora referida sólo a los términos que contienen a las derivadas de orden igual al orden de la ecuación.

Los siguientes conceptos y teorema serán muy últiles en este curso:

- $\nabla f = (\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_1})$.
- La divergencia de un campo vectorial, $F = (F_1, \dots, F_n)$, y el Laplaciano de una función f definidos en un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$

$$\nabla \cdot F = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial F_n}{\partial x_1}.$$
$$\triangle f = \nabla^2 f = \nabla \cdot (\nabla f).$$

Teorema 1 (Teorema de la divergencia). *Ω es una abierto acotado de $\mathbb{R}^n$ con frontera regular, $F : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es una campo vectorial en Ω, $F \in C^1(\overline{\Omega})$, ν es el vector normal exterior a $\partial\Omega$. Entonces,*

$$\int_\Omega \nabla \cdot F(x)\, dx = \int_{\partial\Omega} F \cdot \nu\, d\sigma.$$

1.2. Ejemplos de ecuaciones

Los tres primeros ejemplos son las ecuaciones que se estudian en el curso.

1. *Ecuación de ondas.* Se busca $u(x,t)$ con $x \in \mathbb{R}^n$, tal que

$$u_{tt} - c^2 \triangle u = F(x,t).$$

Aquí $c > 0$ es una constante, F una función dada y $\triangle u = u_{x_1x_1} + \cdots + u_{x_nx_n}$, es el *laplaciano* de u en las coordenadas espaciales (t es el tiempo). Si $n = 1$, se reduce a, $u_{tt} - c^2 u_{xx} = F$.

2. *Ecuación del calor.* Se busca $u(x,t)$ con $x \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$u_t - \triangle u = F(x,t).$$

Si $n = 1$, se reduce a $u_t - c^2 u_{xx} = F$.

3. *Ecuación del potencial.* Se busca $u(x)$ con $x \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$\triangle u = F(x).$$

Si $n = 2$, se reduce a $u_{xx} + u_{yy} = F$.

Una ecuación que no estudiaremos es la siguiente.

4. *Ecuación de Schrödinger.* Se busca $u(x,t)$, con $x \in \mathbb{R}^n$ y tal que

$$iu_t - \triangle u = F(x,t).$$

En lugar de ecuaciones se pueden considerar sistemas.

5. *Ecuaciones de Cauchy-Riemann.* Se buscan $u(x,y), v(x,y)$ definidas en $\mathbb{R}^2$ tales que

$$\begin{cases} u_x = v_y, \\ u_y = -v_x. \end{cases}$$

6. *Ecuaciones de Navier-Stokes.* Encontrar, $u : \mathbb{R}^3 \times [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ y $p : \mathbb{R}^3 \times [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que se verifiquen las ecuaciones

$$\begin{cases} \partial_t u - \triangle u + u \cdot \nabla u = -\nabla p, \\ \nabla \cdot u = 0, \\ u(0) = a, \end{cases}$$

en $\mathbb{R}^3 \times (0, +\infty)$, donde $a : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es una campo vectorial con divergencia nula, $\nabla \cdot a = 0$.

7. *Sistema de elasticidad.* Encontrar $u : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, tal que se verifiquen las ecuaciones
$$\mu \triangle u + (\mu + \lambda) \nabla (\nabla \cdot u) = 0$$
en $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, donde $\mu, \lambda > 0$ son las constantes de elasticidad o de Lamé del sólido Ω.

1.3. Cambio de variables

Repaso de la regla de la cadena para funciones de varias variables. Sea $v(y)$ una función de clase $\mathcal{C}^m$ definida en $D \subset \mathbb{R}^n$ y $\varphi : D' \subset \mathbb{R}^n \to D$, biyectiva y de clase $\mathcal{C}^m$; se define $u(x) = v(\varphi(x))$. Entonces

$$\frac{\partial u}{\partial x_j}(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial y_i}(\varphi(x)) \cdot \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(x).$$

Con la función inversa de φ se puede escribir la relación en la forma $v(y) = u(\varphi^{-1}(y))$ y escribir todas las derivadas de v en términos de las de u.

Ejemplos

1. La ecuación de primer orden, $u_x + u_y = 0$, se transforma en $v_\xi = 0$, por el cambio de variables independientes

$$\begin{cases} \xi = x + y, \\ \eta = x - y. \end{cases}$$

2. Se define en el plano el cambio de variable

$$\begin{cases} \xi = x + ct\,, \\ \eta = x - ct\,, \end{cases} \qquad \text{cuya inversa es} \qquad \begin{cases} x = (\xi + \eta)/2\,, \\ t = (\xi - \eta)/2c\,. \end{cases}$$

$u(x,t)$ y $v(\xi,\eta)$ se relacionan por $u(x,t) = v(x + ct, x - ct)$. Escribir la expresión $u_{tt} - c^2 u_{xx}$ en términos de las derivadas de v. Se debe llegar a $-4c^2 v_{\xi\eta}$.

3. *El laplaciano en coordenadas polares.* Se define en el plano el cambio de variable a coordenadas polares habitual $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$, donde $r > 0$ y $-\pi < \theta < \pi$. Si $v(r,\theta) = u(r\cos\theta, r\sin\theta)$, se verifica que

$$\triangle u = u_{xx} + u_{yy} = v_{rr} + \frac{1}{r}\, v_r + \frac{1}{r^2}\, v_{\theta\theta}.$$

4. *El laplaciano en coordenadas cilíndricas y esféricas.* Las coordenadas cilíndricas son $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ y $z = z$, donde $r > 0$, $0 < \theta < 2\pi$ y $-\infty < z < +\infty$. Si $v(z, \theta, z) = u(r\cos\theta, \sin\theta, z)$,

$$\triangle u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = v_{rr} + \frac{1}{r} v_r + \frac{1}{r^2} v_{\theta\theta} + v_{zz}.$$

Las coordenadas esféricas son (ρ, θ, φ) y su relación con las cartesianas es $x = \rho\cos\theta\sin\varphi$, $y = \rho\sin\theta\sin\varphi$ y $z = \rho\cos\varphi$, $\rho > 0$, $0 < \theta < 2\pi$ y $0 < \varphi < \pi$. En este caso, si $v(\rho, \theta, \varphi) = u(\rho\cos\theta\sin\varphi, \rho\sin\theta\sin\varphi, \rho\cos\varphi)$, se verifica que

$$\triangle u = v_{\rho\rho} + \frac{2}{\rho}\, v_\rho + \frac{1}{(\rho\sin\varphi)^2}\, v_{\theta\theta} + \frac{1}{\rho^2}\, v_{\varphi\varphi} + \frac{\cot\varphi}{\rho^2}\, v_\varphi.$$

Cambio de función incógnita

Si en la ecuación $u_t - u_{xx} - \alpha u = 0$ hacemos el cambio $v(x, t) = e^{-\alpha t} u(x, t)$, queda la ecuación del calor para v.

Si en la ecuación, $u_t = u_x^2 + u_{xx}$, hacemos el cambio $v = e^u$, desaparece el término no lineal y v es solución de $v_t - v_{xx} = 0$.

La siguiente fórmula es muy útil:

$$\triangle(fg) = f\triangle g + g\triangle f + 2\nabla f \cdot \nabla g.$$

Si $v = e^{-\varphi} u$, calcular $e^{-\varphi}\triangle u$ en términos de v.

1.4. Problema de Cauchy. Condiciones iniciales y de contorno. Problema bien planteado

Una ecuación puede tener en principio muchas soluciones, ¿qué datos se necesitan para determinar una de ellas? En EDOs, podía ser el valor de la función y algunas derivadas en un punto; ahora eso no es suficiente.

Por ejemplo, sea $u_x = 0$ en el plano. La solución es $u(x, y) = \varphi(y)$, para alguna función φ; por tanto:

- si nos dan $u(a, b)$, tenemos $u(x, b)$ para todo x;

- si nos dan $u(a, b)$ y $u(a', b)$ y no son iguales, no hay solución y si son iguales, uno de los datos es innecesario.

En general, si $a(x, y)$, $b(x, y)$ y $c(x, y)$ son funciones regulares, el problema de Cauchy asociado a una ecuación de primer orden consiste en encontrar una solución local u de la ecuación

$$a u_x + b u_y = c \tag{1.1}$$

que verifique la condición de Cauchy

$$u(f(s), g(s)) = h(s) \tag{1.2}$$

a lo largo de una curva $S = \{(f(s), g(s))\}$ y cerca de un punto $P = (f(s_0), g(s_0))$ de S. Veremos que esto es posible si sabemos a priori que la curva S es no “caraterística”en P.

Una curva S es caraterística en uno de sus puntos Q si su vector tangente en Q es paralelo al vector $(a(Q), b(Q))$. En caso contrario, se dice no caraterística en Q. Es decir, se ha de verificar que

$$\begin{vmatrix} a(f(s), g(s)) & b(f(s), g(s)) \\ f'(s) & g'(s) \end{vmatrix} \neq 0. \tag{1.3}$$

Las curvas características asociadas a la ecuación (1.1) que pasan por $(f(s), g(s))$ se obtienen resolviendo el sistema de EDO's con condiciones iniciales

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial t} = a(x, y), \\ \frac{\partial y}{\partial t} = b(x, y), \\ x(0, s) = f(s), \ y(0, s) = g(s), \end{cases} \tag{1.4}$$

y si u es solucion de clase C^1 de la ecuación lineal en un entorno de P y

$$z(t, s) = u(x(t, s), y(t, s)),$$

se verifica que

$$\frac{\partial z}{\partial t} = c(x(t, s), y(t, s))$$

y

$$z(t, s) = h(s) + \int_0^t c(x(\tau, s), y(\tau, s)) d\tau. \tag{1.5}$$

En particular,

$$u(x(t, s), y(t, s)) = h(s) + \int_0^t c(x(\tau, s), y(\tau, s)) d\tau.$$

Es decir, que los valores de u están determinados a lo largo de una curva característica que pasa por un punto de S por el valor de u en la intersección de la característica con S y por los valores de c a lo largo de la característica.

Recíprocamente, si a, b, c y $(f(s), g(s), h(s))$ son de clase C^1 en entornos de P y s_0 respectivamente, la teoría de las EDO's asegura que el sistema (1.4) admite una solución de clase C^1 para (t, s) cerca de $(0, s_0)$. Es decir, existe un $\delta > 0$ tal que la transformación

$$\begin{cases} x = x(t, s), \\ y = y(t, s), \end{cases} \tag{1.6}$$

está bien definida y es de clase C^1 en $(-\delta, \delta) \times (s_0 - \delta, s_0 + \delta)$. Además, si S es no caraterística en P, el Jacobiano de esta transformación en $(0, s_0)$ es

$$\begin{vmatrix} a(f(s_0), g(s_0)) & b(f(s_0), g(s_0)) \\ f'(s_0) & g'(s_0) \end{vmatrix} \neq 0 \tag{1.7}$$

y el teorema de la función inversa garantiza que el sistema (1.6) se puede invertir para (x, y) cerca de P y (t, s) cerca de $(0, s_0)$. Si definimos entonces

$$u(x, y) = z(t(x, y), s(x, y)),$$

donde z se define mediante (1.5), la regla de la cadena muestra que u es una función de clase C^1 en un entorno de P. Como $z(t, s) = u(x(t, s), y(t, s))$, haciendo $t = 0$, vemos que u verifica la condición de Cauchy (1.2) en S cerca P. Derivando la misma identidad respecto a t, obtenemos que

$$\frac{\partial z}{\partial t} = u_x(x(t, s), y(t, s))\frac{\partial x}{\partial t} + u_y(x(t, s), y(t, s))\frac{\partial y}{\partial t}$$

y como

$$\frac{\partial z}{\partial t} = c(x(t, s), y(t, s)),$$

concluímos que u verifica la ecuación (1.1) en un entorno de P.

Por lo tanto, el problema de Cauchy asociado a la ecuación lineal de orden uno tiene una única solución local de clase C^1 en un entorno de P si S no es una curva característica en P, $a(x, y)$, $b(x, y)$, $c(x, y)$ y $(f(s), g(s), h(s))$ son funciones de clase C^1 cerca de P y s_0 respectivamente.

Ejemplo. La solución general de la ecuación

$$u_x - u_y = 0.$$

es

$$u(x, y) = \varphi(x + y),$$

donde φ es cualquier función de clase C^1. Las soluciones son constantes en las rectas $x + y = k$ y las curvas S en la que se dan los datos de Cauchy deben contener un único punto de cada una de estas rectas si queremos que el problema de Cauchy esté bien planteado para todos los datos: la curva $x + y = 0$ es característica para esta ecuación y el problema de Cauchy

$$\begin{cases} u_x - u_y = 0, \\ u(x, -x) = h(x) \end{cases}$$

no tiene solución si h no es una constante.

Las rectas $y = k$, en el primer ejemplo y las rectas $x + y = k$, en el segundo, son características y ponen limitaciones al lugar en que se deben dar los datos para que el problema de Cauchy asociado tenga siempre sentido (poder dar datos arbitrarios sobre S). Las soluciones de ambas ecuaciones son constantes a lo largo de las características y los datos h no pueden ser arbitrarios a lo largo de las mismas.

Se puede comprobar, que la condición de que S sea no característica en P para la ecuación lineal, equivale a pedir que las condiciones

$$\begin{cases} au_x + bu_y = c, \\ u(f(s), g(s)) = h(s), \end{cases} \tag{1.8}$$

determinen unívocamente el valor de todas las derivadas sobre S y cerca de P de una posible solución u de la ecuación en un entorno de P. En efecto, si u es solución de (1.8) en un entorno de P, tendremos que

$$\begin{cases} a(f(s), g(s))u_x(f(s), g(s)) + b(f(s), g(s))u_y(f(s), g(s)) = c(f(s), g(s)), \\ f'(s)u_x(f(s), g(s)) + g'(s)u_y(f(s), g(s)) = h'(s), \end{cases}$$

y este sistema tiene solución única $\nabla u(f(s), g(s))$ para s cerca de s_0, si (1.7) se verifica. Derivando la primera ecuación en (1.8) respecto a x e y y recordando que en el paso anterior hemos hallado los posibles valores $(\phi(s), \psi(s))$ de $\nabla u(f(s), g(s))$, podemos comprobar que las entradas de la matriz $D^2u(f(s), g(s))$ quedan también - gracias a (1.7) - unívocamente determinadas sobre S por derivadas sucesivas de $(f(s), g(s), h(s))$ y de derivadas de a, b y c sobre S. Lo mismo ocurre con las demás derivadas de u sobre S mientras las funciones que son datos en (1.8), se puedan derivar...

En general, el problema de Cauchy asociado a una ecuación de primer orden consiste en encontrar en un entorno de P una solución u de clase C^1 del problema

$$\begin{cases} F(x, y, u, u_x, u_y) = 0 \\ u(f(s), g(s)) = h(s) \end{cases} \tag{1.9}$$

Se dice que la curva en el espacio, $(f(s), g(s), h(s))$, por la que queremos pasar una superficie, $z = u(x, y)$, que verifique la ecuación es no característica, si todas las derivadas parciales de u sobre S están unívocamente determinadas cerca de P por la ecuación y la condición de Cauchy sobre S.

En las ecuaciones no lineales el ser no caraterística depende en general del dato de Cauchy h que damos sobre S y no sólo de S. Por ejemplo, para la ecuación cuasilineal

$$a(x, y, u)u_x + b(x, y, u)u_y = c(x, y, u), \tag{1.10}$$

la curva, $(f(s), g(s), h(s))$, es no característica en $P = (f(s_0), g(s_0))$ si

$$\begin{vmatrix} a(f(s), g(s), h(s)) & b(f(s), g(s), h(s)) \\ f'(s) & g'(s) \end{vmatrix} \neq 0, \text{ para } s \text{ cerca de } s_0,$$

condición que depende de los valores de h en S. En este caso, si a, b, c y $(f(s), g(s), h(s))$ son de clase C^1 en entornos de P y s_0, la teoría de las

EDO's asegura que el sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial t} = a(x,y,z), \\ \frac{\partial y}{\partial t} = b(x,y,z), \\ \frac{\partial z}{\partial t} = c(x,y,z), \\ x(0,s) = f(s), \; y(0,s) = g(s), \; z(0,s) = h(s), \end{cases} \tag{1.11}$$

tiene una única solución $(x(t,s), y(t,s), z(t,s))$ de clase C^1 para (t,s) cerca de $(0,s_0)$. Además, si S es no caraterística en P, el Jacobiano de la transformación

$$\begin{cases} x = x(t,s), \\ y = y(t,s), \end{cases} \tag{1.12}$$

en $(0,s_0)$ es

$$\begin{vmatrix} a(f(s_0), g(s_0), h(s_0)) & b(f(s_0), g(s_0), h(s_0)) \\ f'(s_0) & g'(s_0) \end{vmatrix} \neq 0$$

y el teorema de la función inversa garantiza que el sistema (1.12) se puede invertir para (x,y) cerca de P y (t,s) cerca de $(0,s_0)$. Si definimos

$$u(x,y) = z(t(x,y), s(x,y)), \text{ o equivalentemente, } z(t,s) = u(x(t,s), y(t,s));$$

la regla de la cadena muestra que u es de clase C^1 en un entorno de P. Si hacemos $t = 0$ en la seguna relación, vemos que u verifica la condición de Cauchy (1.2) en S cerca de P. Derivando otra vez la misma identidad respecto a t, concluimos que

$$\frac{\partial z}{\partial t} = u_x(x(t,s), y(t,s))\frac{\partial x}{\partial t} + u_y(x(t,s), y(t,s))\frac{\partial y}{\partial t},$$

que combinado con las identidades que verifican $x(t,s)$, $y(t,s)$ y $z(t,s)$ en (1.11), implica que u es solución de (1.10) en un entorno de P.

El mismo razonamiento muestra que el problema de Cauchy asociado a la ecuación cuasilineal

$$\begin{cases} a(x,y,u)u_x + b(x,y,u)u_y = c(x,y,u), \\ u(f(s), g(s)) = h(s), \end{cases} \tag{1.13}$$

tiene solución única de clase C^1 en un entorno de P, si $(f(s), g(s), h(s))$ es no característica en P: si $\widetilde{u}$ es una segunda solución local C^1 de (1.13) y definimos

$$\tilde{z}(t,s) = \tilde{u}(x(t,s), y(t,s)),$$

$\tilde{z}$ es de clase C^1 y puesto que

$$\begin{aligned}(z - \tilde{z})_t &= c(x,y,z) - c(x,y,\tilde{z}) \\ &\quad - (a(x,y,z) - a(x,y,\tilde{z}))\,\tilde{u}_x - (b(x,y,z) - b(x,y,\tilde{z}))\,\tilde{u}_y,\end{aligned}$$

podemos encontrar $M > 0$ tal que

$$|\,(z-\tilde{z})_t\,| \leq M|z-\tilde{z}| \text{ y } \ (z-\tilde{z})\,(0,s) = 0,$$

para (t,s) cerca de $(0,s_0)$, lo que muestra que $z = \tilde{z}$ cerca de $(0,s_0)$ y que $u = \tilde{u}$ cerca de $(f(s_0), g(s_0))$. Para verificar lo último, definid para $\epsilon > 0$

$$v_\epsilon(t,s) = \sqrt{(z(t,s) - \tilde{z}(t,s))^2 + \epsilon^2},$$

mostrad que

$$-Mv_\epsilon \leq \partial_t v_\epsilon \leq Mv_\epsilon,$$

para (t,s) cerca de $(0,s_0)$ y concluid después de hacer $\epsilon \to 0^+$, que

$$|z(t,s) - \tilde{z}(t,s)| \leq e^{M|t|}|z(t,0) - \tilde{z}(t,0)| = 0,$$

allí donde $z - \tilde{z}$ está definida.

El problema de Cauchy no lineal (1.9) tendrá solución si primero, podemos encontrar valores admisibles de $\nabla u(f(s_0), g(s_0))$ para una posible solución u de (1.9); es decir, encontrar pares (p_0, q_0) tales que

$$\begin{cases} F(f(s_0), g(s_0), h(s_0), p_0, q_0) = 0, \\ p_0 f'(s_0) + q_0 g'(s_0) = h'(s_0). \end{cases}$$

Si (p_0, q_0) es admisible, tendremos también que asegurarnos que el problema no lineal (1.9) es no característico para la curva $(f(s), g(s), h(s))$ y el valor admisible (p_0, q_0) con s cerca de s_0. Es decir, que todas las derivadas de una posible solución de (1.9) con $\nabla u(f(s_0), g(s_0)) = (p_0, q_0)$, estén determinadas sobre S por los datos y sus derivadas sobre S. Por el teorema de la función implícita, $\nabla u(f(s), g(s))$ estará así determinado sobre S si el sistema

$$\begin{cases} F(f(s), g(s), h(s), p, q) = 0, \\ pf'(s) + qg'(s) = h'(s), \end{cases}$$

define de forma única a p y q cerca de (p_0, q_0) como funciones de s, $p = p(s)$ y $q = q(s)$, con $p(s_0) = p_0$ y $q(s_0) = q_0$. En tal caso y si los datos en (1.9) son regulares, es posible comprobar que (1.9) determina todas las derivadas sobre S y cerca de P, de una posible solución de (1.9), que verique

$$\nabla u(f(s_0), g(s_0)) = (p_0, q_0).$$

Lo anterior se entiende mejor si aplanamos la curva S: el cambio de variables

$$\begin{cases} x = f(s) - tg'(s), \\ y = g(s) + tf'(s), \end{cases}$$

transforma (1.9) en un problema de Cauchy equivalente sobre la curva $t = 0$, cerca de $s = s_0$ y de la forma

$$\begin{cases} G(s, t, u, u_s, u_t) = 0, \\ u(s, 0) = h(s). \end{cases} \tag{1.14}$$

(1.14) tendrá alguna solución si existe un valor admisible para $u_t(s_0, 0)$; es decir, una solución q_0 de la ecuación

$$G(s_0, 0, h(s_0), h'(s_0), q_0) = 0.$$

Si éste es el caso, el problema (1.14) es no característico para el valor admisible q_0, si la ecuación

$$G(s, 0, h(s), h'(s), q) = 0,$$

determina a q de forma única como función de s, $q = q(s)$ con $q(s_0) = q_0$, para (q, s) cerca de (q_0, s_0). En tal caso, necesariamente $u_t(s, 0) = q(s)$, para s cerca de s_0 cuando u es solución de (1.14) con $u_t(s_0, 0) = q_0$, y el teorema de la función implícita asegura que lo anterior se verifica cuando

$$\frac{\partial G}{\partial q}(s_0, 0, h(s_0), h'(s_0), q_0) \neq 0. \tag{1.15}$$

Además, bajo esta condición, el teorema de la función implícita en las variables (s, t, z, p, q), nos asegura que cerca de $(s_0, 0, h(s_0), h'(s_0), q_0)$, la solución de

$$G(s, t, z, p, q) = 0,$$

coincide con la gráfica de una función

$$q = H(s, t, z, p),$$

definida cerca de $(s_0, 0, h(s_0), h'(s_0))$, que verifica

$$H(s_0, 0, h(s_0), h'(s_0)) = q_0.$$

Entonces, (1.14) con $u_t(s_0, 0) = q_0$ es equivalente a resolver

$$\begin{cases} u_t = H(s, t, u, u_s), \\ u(s, 0) = h(s). \end{cases} \tag{1.16}$$

Por otro lado, es fácil mostrar que un problema del tipo

$$\begin{cases} u_y = H(x, y, u, u_x), \\ u(x, 0) = h(x). \end{cases}$$

es no característico para cualquier dato h, porque éste determina todas las derivadas de una posible solución u sobre la curva $y = 0$, allí donde conozcamos las derivas de h y las derivadas parciales de H.

Si se deshacen las cuentas que están detrás de los cambios de variables que hemos utilizado para hallar una condición analítica (la (1.15)) asociada a los casos en los que el problema (1.9) es no característico para un valor admisible (p_0, q_0), se llega a la conclusión de que (1.15) es equivalente en las coordenadas originales (x, y) a la condición

$$\begin{vmatrix} F_p & F_q \\ f' & g' \end{vmatrix} \neq 0, \tag{1.17}$$

con $s = s_0$ y $(x, y, z, p, q) = (f(s_0), g(s_0), h(s_0), p_0, q_0)$. En tal caso, si resolvemos el sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial t} = F_p, \\ \frac{\partial y}{\partial t} = F_q, \\ \frac{\partial z}{\partial t} = pF_p + qF_q, \\ \frac{\partial p}{\partial t} = -F_x - pF_z, \\ \frac{\partial q}{\partial t} = -F_y - qF_z, \end{cases}$$

con condiciones iniciales

$$x(0, s) = f(s),\ y(0, s) = g(s),\ z(0, s) = h(s),\ p(0, s) = p(s) \text{ y } q(0, s) = q(s),$$

que tiene solución única de clase C^1 en un entorno de $(0, s_0)$ cuando F es de clase C^2 y f, g, h son C^1 cerca de $s = s_0$, resulta que el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x = x(t, s), \\ y = y(t, s), \end{cases}$$

es también invertible alrededor de $(0, s_0)$ y P, y que definiendo

$$z(t, s) = u(x(t, s), y(t, s)),$$

u es también una solución única de clase C^1 del problema de Cauchy (1.9) con $\nabla u(f(s_0), g(s_0)) = (p_0, q_0)$.

En las ecuaciones de segundo orden puede haber características pero el concepto es más complicado. En esos caso, el problema de Cauchy consiste en encontrar una función u de clase C^2 que verifique la ecuación de segundo orden en un entorno de P y cuyas derivadas de orden menor que dos sobre la curva S están dadas:

$$\begin{cases} F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = 0, \\ u(f(s), g(s)) = h(s), \\ u_x(f(s), g(s)) = \phi(s), \\ u_y(f(s), g(s)) = \psi(s), \end{cases} \tag{1.18}$$

donde la quíntupla $(f(s), g(s), h(s), \phi(s), \psi(s))$ verifica la condición de compatibilidad

$$\phi(s)f'(s) + \psi(s)g'(s) = h'(s).$$

A veces, en lugar de que nos den los valores de u_x y u_y sobre $(f(s), g(s))$, nos darán los valores de u y de su derivada normal a lo largo de la curva. Es decir, nos pedirán hallar u que verifique

$$\begin{cases} F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = 0, \\ u(f(s), g(s)) = h(s), \\ \frac{\partial u}{\partial v}(f(s), g(s)) = \chi(s)/\sqrt{f'^2 + g'^2}, \end{cases} \qquad \nu = \frac{(-g'(s), f'(s))}{\sqrt{f'^2 + g'^2}} \perp (f'(s), g'(s)),$$

cerca de P y para una nueva función χ que se relaciona con ϕ y ψ mediante las fórmulas

$$\begin{cases} \phi f' + g'\psi = h', \\ -\phi g' + \psi f' = \chi. \end{cases}$$

Como antes, el cambio de variables

$$\begin{cases} x = f(s) - tg'(s), \\ y = g(s) + tf'(s), \end{cases}$$

transforma el problema (1.18) en otro del tipo

$$\begin{cases} G(s, t, u, u_s, u_t, u_{ss}, u_{st}, u_{tt}) = 0, \\ u(s, 0) = h(s), \\ u_t(s, 0) = \chi(s). \end{cases} \tag{1.19}$$

Para que estos problemas equivalentes tengan solución, tendremos primero que encontrar los valores admisibles de $u_{tt}(s_0, 0)$ en $(s_0, 0)$; es decir, las soluciones γ de la ecuación

$$G(s_0, 0, h(s_0), h'(s_0), \chi(s_0), h''(s_0), \chi'(s_0), \gamma) = 0,$$

y si las hay; digamos $\gamma = \gamma_0$, esperar que el problema (1.19) sea equivalente - por el teorema de la función implícita - a otro del tipo

$$\begin{cases} u_{tt} = H(s, t, u, u_s, u_t, u_{ss}, u_{st}), \\ u(s, 0) = h(s), \\ u_t(s, 0) = \chi(s). \end{cases} \tag{1.20}$$

donde *todas las derivadas de una posible solución de* (1.20) *están determinadas en* $t = 0$ *y cerca de* $(s_0, 0)$, *por las derivadas del dato de Cauchy* (h, χ) *y las derivadas de* H *sobre*

$$(s, 0, h(s), h'(s), \chi(s), h''(s), \chi'(s)).$$

La ecuación cuasilineal de segundo orden en dos variables es de la forma

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} = d, \tag{1.21}$$

donde a, b, c y d dependen de x, y, u, u_x y u_y. El problema de Cauchy consiste en encontrar una solución de (1.21) con valores compatibles de u, u_x y u_y sobre una curva S. Si $S = \{(f(s), g(s))\}$, el dato de Cauchy es

$$u(f(s), g(s)) = h(s),\ u_x(f(s), g(s)) = \phi(s),\ u_y(f(s), g(s)) = \psi(s) \tag{1.22}$$

y debe verificar la condición de compatibilidad

$$h'(s) = \phi(s)f'(s) + \psi(s)g'(s). \tag{1.23}$$

Esto equivale a dar sobre S los valores de u y los de su derivada normal

$$u(f(s), g(s)) = h(s), \quad \frac{-u_x g' + u_y f'}{\sqrt{f'^2 + g'^2}} = \chi(s). \tag{1.24}$$

Si $u(x, y)$ es solución de (1.21), la ecuación (1.21) y las condiciones de compatibilidad sobre S para los valores de u_x y u_y implican que

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} = d,\ f'u_{xx} + g'u_{xy} = \phi',\ f'u_{xy} + g'u_{yy} = \psi' \quad ,$$

que es un sistema con coeficientes que dependen de s y del dato de Cauchy y que tiene por incógnitas las derivadas segundas de u en S. Éste sistema tendrá solución única si

$$D = \begin{vmatrix} a & 2b & c \\ f' & g' & 0 \\ 0 & f' & g' \end{vmatrix} = ag^{'2} - 2bf'g' + cf^{'2} \neq 0.$$

Si $D \neq 0$ en $(f(s_0), g(s_0), h(s_0), \phi(s_0), \psi(s_0))$, derivando la ecuación (1.21), se concluye que todas las derivadas de una solución de (1.21), (1.22) (o de (1.21) y (1.24)) están determinadas a lo largo de la curva $(f(s), g(s), h(s))$ cerca de $(f(s_0), g(s_0), h(s_0), \phi(s_0), \psi(s_0))$ por los datos de Cauchy

$$(f(s), g(s), h(s), \phi(s), \psi(s))$$

y los valores de los coeficientes de la ecuación (1.21) en

$$(f(s), g(s), h(s), \phi(s), \psi(s)).$$

Las curvas características para (1.21), (1.22) son las curvas en $\mathbb{R}^5$

$$(f(s), g(s), h(s), \phi(s), \psi(s))$$

tales que $D \equiv 0$ a lo largo de su recorrido. Si la ecuación es lineal, la condición de ser característica es independiente de las tres últimas componentes del dato de Cauchy $(h(s), \phi(s), \psi(s))$ y sólo depende de la proyección de la curva en el plano xy, $a(x,y)$, $b(x,y)$ y $c(x,y)$, como ocurre con las ecuaciones de primer orden; es decir, de la traza $S = \{(f(s), g(s))\}$ en el plano xy de

$$(f(s), g(s), h(s), \phi(s), \psi(s)).$$

En particular, en el caso lineal y si S está dada implicitamente por la ecuación, $\phi(x,y) =$ cte. ((f', g') es paralelo al vector $(\phi_y, -\phi_x)$), la condición de ser curva caraterística se reduce a

$$\nabla\phi \neq 0 \text{ y } \; a(x,y)\phi_x^2 + 2b(x,y)\phi_x\phi_y + c(x,y)\phi_y^2 = 0, \tag{1.25}$$

o equivalentemente $\nabla\phi \neq 0$ y

$$c\phi_y + \left(b \pm \sqrt{b^2 - ac}\right)\phi_x = 0. \tag{1.26}$$

Recíprocamente, si ϕ verifica (1.25) o (1.26), las curvas $\phi(x,y) =$ cte. son curvas características de la ecuación.

La ecuación lineal de segundo orden es

$$a(x,y)u_{xx} + 2b(x,y)u_{xy} + c(x,y)u_{yy} = d(x,y,u,u_x,u_y) \tag{1.27}$$

y para intentar encontrar una forma equivalente más sencilla de la ecuación cerca de $P = (x_0, y_0)$, se puede considerar un cambio de variables abstracto

$$\begin{cases} \xi = \alpha(x,y), \\ \eta = \beta(x,y), \end{cases}$$

con funciones regulares α, β con Jacobiano no nulo. En tal caso, se puede mostrar que u, como función de las variables (ξ, η), es solución de la ecuación

$$\tilde{a}u_{\xi\xi} + 2\tilde{b}u_{\xi\eta} + \tilde{c}u_{\eta\eta} = \tilde{d}(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta),$$

donde

$$\begin{aligned}
\tilde{a} &= a\alpha_x^2 + 2b\alpha_x\alpha_y + c\alpha_y^2 = A\nabla\alpha \cdot \nabla\alpha, \\
\tilde{b} &= a\alpha_x\beta_x + b\left(\alpha_x\beta_y + \alpha_y\beta_x\right) + c\alpha_y\beta_y = A\nabla\alpha \cdot \nabla\beta, \\
\tilde{c} &= a\beta_x^2 + 2b\beta_x\beta_y + c\beta_y^2 = A\nabla\beta \cdot \nabla\beta,
\end{aligned}$$

y A es la matriz simétrica

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}.$$

Si a y c son nulas en un entorno de P y $b(P) \neq 0$, la ecuación (1.21) se reduce dividiendo por b y cerca de P a una ecuación del tipo (1.28). Supuesto que $c \neq 0$ y $E = ac - b^2 < 0$ cerca de P, la ecuación característica (1.25) tiene dos soluciones independientes definidas en un entorno de P, $\alpha(x, y)$ y $\beta(x, y)$. En particular, las soluciones de los problemas de Cauchy

$$\begin{cases} c\alpha_y + \left(b + \sqrt{b^2 - ac}\right) \alpha_x = 0, \\ \alpha(x, y_0) = x, \end{cases} \qquad \begin{cases} c\beta_y + \left(b - \sqrt{b^2 - ac}\right) \beta_x = 0, \\ \beta(x, y_0) = x, \end{cases}$$

De ello concluimos que por P pasan dos curvas características no paralelas en P; las curvas $\alpha(x, y) = x_0$ y $\beta(x, y) = y_0$. En lo dos casos anteriores, el operador se dice de tipo *hiperbólico* y con el cambio de variables, $\xi = \alpha(x, y)$, $\eta = \beta(x, y)$, en el que

$$A\nabla\alpha \cdot \nabla\alpha = A\nabla\beta \cdot \nabla\beta \equiv 0 \text{ y } A\nabla\alpha \cdot \nabla\beta \neq 0,$$

cerca de P, la ecuación original se transforma en

$$u_{\xi\eta} = F(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta). \tag{1.28}$$

Si además hacemos el cambio, $X = \frac{1}{2}(\xi + \eta)$, $T = \frac{1}{2}(\xi - \eta)$, la última ecuación se transforma en una ecuación de tipo ondas

$$u_{TT} - u_{XX} = H(X, T, u, u_X, u_T),$$

y la ecuación de ondas se considera la forma canónica de las ecuaciones de tipo *hiperbólico.*

Ejemplo. Las curvas características de la ecuación

$$u_{yy} - c^2 u_{xx} = 0 \tag{1.29}$$

son las curvas $\phi =$const. con $\phi_x^2 - c^2\phi_y^2 = 0$ y $\nabla\phi \neq 0$; luego ϕ debe ser solución de una de las ecuaciones $\phi_x \pm c\phi_y = 0$, cuyas soluciones sabemos calcular por el método de las características y son $\phi(x, y) = \varphi(x \mp cy)$, con $\varphi' \neq 0$. Por tanto, $\phi =$const. equivale a $x \pm cy =$const. y por cada punto del plano pasan dos características.

Las características de la ecuación

$$u_{xy} = 0,$$

son las curvas $x =$const. e $y =$const. porque las soluciones de $\phi_x\phi_y = 0$, con $\nabla\phi \neq 0$, son $\phi(x, y) = \varphi(x)$ o $\phi(x, y) = \varphi(y)$, con $\varphi' \neq 0$. En este caso, también pasan dos características por cada punto del plano.

Si $E > 0$ en un entorno de P, la ecuación se dice de tipo *elíptico.* En este caso, podemos suponer que a y c son positivas cerca de P, la matriz A

es entonces definida positiva y no hay curvas caraterísiticas cerca de P. Sin embargo, (1.25) tiene una solución a valores complejos ϕ, que verifica

$$\nabla\phi \neq 0, \quad c\phi_y + \left(b + i\sqrt{ac - b^2}\right)\phi_x = 0 \tag{1.30}$$

y si $\phi = \alpha + i\beta$, con α y β funciones a valores reales, (1.25) o (1.30) son equivalentes a que

$$A\nabla\alpha \cdot \nabla\alpha = A\nabla\beta \cdot \beta \neq 0 \quad \text{y} \quad A\nabla\alpha \cdot \nabla\beta = 0,$$

cerca de P. Entonces, el cambio de variables $\xi = \alpha(x, y),\ \eta = \beta(x, y)$ transforma (1.27) en

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = G(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta),$$

y la ecuación de Laplace se considera como la forma canónica de las ecuaciones de tipo *elíptico*.

Ejemplo. La ecuación $u_{xx} + u_{yy} = 0$ no tiene curvas características porque la ecuación $\phi_x^2 + \phi_y^2 = 0$, con $\nabla\phi \neq 0$ y ϕ una función a valores reales no tiene solución.

Si $E \equiv 0$ en un entorno de P y $(c, b) \neq 0$ en P, la ecuación se dice de tipo *parabólico*. Por P pasa una curva característica, la solución de

$$\begin{cases} c\alpha_y + b\alpha_x = 0, \\ \alpha(x, y_0) = x \text{ o } \alpha(x_0, y) = y, \end{cases} \tag{1.31}$$

- donde la recta, $y = y_0$ o $x = x_0$, sobre la que damos el dato de Cauchy en (1.31), la elegimos en función de que c o b sean distintos de cero en (x_0, y_0) y (1.31) sea no característico en (x_0, y_0) - y (1.25) tiene una solución $\alpha(x, y)$ con gradiente no nulo en P. Además, $E \equiv 0$ cerca de P implica que $A\nabla\alpha \equiv 0$ en un entorno de P. En este caso, tomando una función arbitraria $\beta(x, y)$ (si $\alpha_x \neq 0$, considerar $\beta(x, y) = y$ y si $\alpha_y \neq 0$, hacer $\beta(x, y) = x$) que complete el cambio de variables, la nueva ecuación se reduce a

$$u_{\eta\eta} = M(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta). \tag{1.32}$$

Finalmente, si c y b son nulas cerca de P y $a(P) \neq 0$, la ecuación original tiene la forma (1.32), después de dividir por a.

La ecuación del calor asociada al operador $u_{xx} - u_y$, se considera como la forma canónica de las ecuaciones de tipo *parabólico*.

Ejemplo. Las características de la ecuación $u_{xx} - u_y = 0$ son las curvas $y =$ const., porque $\phi =$const. con $\phi_x^2 = 0$ y $\nabla\phi \neq 0$ tiene por solución, $\phi(x, y) = \varphi(y)$, con $\varphi' \neq 0$. En este caso, por cada punto del plano pasa una única curva característica.

La clasificación anterior de las ecuaciones lineales de segundo orden no es exhaustiva pero cubre los casos que han atraído más atención. Por ejemplo, la ecuación

$$u_{xx} + y u_{yy} = 0,$$

no está en ninguna de las clases anteriores alrededor de puntos en la recta $y = 0$. La ecuación es de tipo elíptico en la región $y > 0$ e hiperbólico para $y < 0$.

1.5. Teorema de Cauchy-Kowalevsky

Una función $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ se dice analítica de variable real en un abierto Ω, si f está en $C^\infty(\Omega)$ y para cada x_0 en Ω, existe un $\varrho > 0$ y numeros a_α, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ en $\mathbb{N}^n$, tal que la serie de potencias

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha \left(x - x_0\right)^\alpha ,$$

converge absolutamente y su suma coincide con f en $B_\varrho(x_0)$. En tal caso, es fácil comprobar que

$$a_\alpha = \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^\alpha}(x_0), \text{ para todo } \alpha \in \mathbb{N}^n.$$

Además, f en $C^\infty(\Omega)$ es analítica en Ω si y sólo si para cada compacto $K \subset \Omega$, existen $M > 0$ y $\rho > 0$ tal que

$$|\frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^\alpha}(x)| \leq M \alpha! \rho^{-|\alpha|}, \text{ para todo } x \in K \text{ y } \alpha \in \mathbb{N}^n.$$

Finalmente, la suma, producto, cociente y composición de funciones analíticas es analítica y cuando los datos en el teorema de la función inversa o el de la función implícita son analíticos, las funciones inversa e implícita asociadas - cuya existencia se afirma - son también analíticas (Ver el capítulo 3 en el libro Fritz John. *Partial Differential Equations*).

El teorema de Cauchy-Kowalevsky garantiza que los problemas de Cauchy asociados a problemas de Cauchy no característicos con datos analíticos admiten una única solución local analítica. Consideramos primero la versión para $n = 2$ para ecuaciones de primer orden con datos de Cauchy en $y = 0$ y con u_y despejada.

Teorema 2. *Se considera el problema de Cauchy*

$$\begin{cases} u_y = H(x, y, u, u_x) , \\ u(x, 0) = h(x) \end{cases} \tag{1.33}$$

y suponemos que h es analítica en un entorno de x_0 y que H lo es en un entorno de $(x_0, 0, h(x_0), h'(x_0))$. Entonces, existe una única solución analítica de (1.33) *en un entorno de* $(x_0, 0)$*.*

Consideramos ahora la versión para $n = 2$ para ecuaciones de segundo orden con datos de Cauchy en $y = 0$ y con u_{yy} despejada.

Teorema 3. *Se considera el problema de Cauchy*

$$\begin{cases} u_{yy} = H(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}) \,, \\ u(x, 0) = h(x) \,, \\ u_y(x, 0) = \chi(x) \,. \end{cases} \tag{1.34}$$

y suponemos que h y χ son funciones analíticas en un entorno de x_0 y que H lo es en un entorno de

$$(x_0, 0, h(x_0), h''(x_0), \chi(x_0), h''(x_0), \chi'(x_0)).$$

Entonces, existe una única solución analítica de (1.34) *en un entorno de* $(x_0, 0)$.

De la ecuación y de las condiciones de Cauchy en (1.33) o (1.34), todos los valores de

$$c_{ij} = \frac{\partial^{i+j} u}{\partial x^i \partial y^j}(x_0, 0),$$

quedan determinados por los datos y la ecuación. Con estos, se puede escribir formalmente la serie de Taylor de una posible solución u en $(x_0, 0)$, como

$$u(x, y) = \sum_{i,j=0}^{+\infty} \frac{c_{ij}}{i!j!} \, (x - x_0)^i \, y^j.$$

Lo interesante, que no haremos en clase, es comprobar que la serie converge en un entorno de $(x_0, 0)$ y define efectivamente una solución de (1.33) o (1.34) en un entorno de $(x_0, 0)$.

La unicidad de solución analítica en un entorno de $(x_0, 0)$ es obvia por la determinación unívoca del desarrollo en series de potencias alrededor $(x_0, 0)$ de una tal posible solución

El problema de Cauchy

$$\begin{cases} F(x, y, u, u_x, u_y) = 0, \\ u(f(s), g(s)) = h(s), \end{cases} \tag{1.35}$$

es equivalente por medio del cambio de variables

$$\begin{cases} x = f(s) - tg'(s), \\ y = g(s) + tf'(s), \end{cases} \tag{1.36}$$

que transforma localmente la curva $S = \{(f(s), g(s))\}$ en el plano (x, y), en la curva $t = 0$ en el plano (t, s), a un problema del tipo

$$\begin{cases} G(s, t, u, u_s, u_t) = 0, \\ u(s, 0) = h(s). \end{cases} \tag{1.37}$$

Que S sea no característica en $P = (f(s_0), g(s_0))$ para el problema de Cauchy (1.35) y para un valor admisible (p_0, q_0) es equivalente a que $t = 0$ lo sea para (1.37) en $(s_0, 0)$, para el valor admisible que corresponde a (p_0, q_0) de $u_t(s_0, 0)$ y que asocia el cambio de variables (abusando de la notación, lo seguimos denotando q_0 por comodidad...). Es decir, que en un entorno de $(s_0, 0, h(s_0), h'(s_0), q_0)$, el problema (1.37) con $u_t(s_0) = q_0$, sea equivalente a un problema del tipo

$$\begin{cases} u_t = H(s, t, u, u_s), \\ u(s, 0) = h(s), \end{cases}$$

con $H(s_0, 0, h(s_0), h'(s_0)) = q_0$. Por el teorema de la función implícita, lo último está garantizado cuando

$$G(s_0, 0, h(s_0), h'(s_0), q_0) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial G}{\partial q}(s_0, 0, h(s_0), h'(s_0), q_0) \neq 0,$$

o equivalentemente - como se puede comprobar - cuando (1.17) se verifica. Además, como la inversa, composición y el teorema de la función implícita dan lugar a funciones analíticas cuando los datos son analíticos, la versión del teorema de Cauchy-Kowalevsky en el Teorema 2, garantiza que si $F(x, y, z, p, q)$ en (1.35) es analítica en (x, y, z, p, q) cerca de

$$(f(s_0), g(s_0), h(s_0), p_0, q_0),$$

f, g, h son analíticas en s_0, (p_0, q_0) es un valor admisible y S es no característica en P para (1.35) con (p_0, q_0) - se verifica (1.17) - entonces (1.35) tiene en algún entorno de P una única solución analítica

$$u(x, y) = \sum_{i,j=0}^{+\infty} \frac{a_{ij}}{i!j!}(x - f(s_0))^i (y - g(s_0))^j \tag{1.38}$$

con $\nabla u(P) = (p_0, q_0)$. En tal caso, los a_{ij} se calculan a partir de las derivadas de F en $(f(s_0), g(s_0), h(s_0), p_0, q_0)$ y las de f, g y h en s_0.

Se puede enunciar un resultado análogo para el problema de Cauchy asociado a la ecuación de segundo orden (1.18) y a alguno de sus posibles valores admisibles para las derivadas segundas. Es decir, si $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$ es tal que

$$\begin{cases} F(f(s_0), g(s_0), h(s_0), \phi(s_0), \psi(s_0), \alpha_0, \beta_0, \gamma_0) = 0, \\ \alpha_0 f'(s_0) + \beta_0 g'(s_0) = \phi'(s_0), \\ \beta_0 f'(s_0) + \gamma_0 g'(s_0) = \psi'(s_0), \end{cases}$$

F es analítica en sus variables $(x, y, z, p, q, \alpha, \beta, \gamma)$ cerca de

$$(f(s_0), g(s_0), h(s_0), \phi(s_0), \psi(s_0), \alpha_0, \beta_0, \gamma_0),$$

f, g, h, ϕ y ψ lo son cerca de s_0 y

$$\begin{vmatrix} F_\alpha & F_\beta & F_\gamma \\ f' & g' & 0 \\ 0 & f' & g' \end{vmatrix} \neq 0, \tag{1.39}$$

con $s = s_0$ y

$$(x, y, z, p, q, \alpha, \beta, \gamma) = (f(s_0), g(s_0), h(s_0), \phi(s_0), \psi(s_0), \alpha_0, \beta_0, \gamma_0),$$

entonces (1.18) tiene en un entorno de $(f(s_0), g(s_0))$ una única solución analítica de la forma (2.16), cuyas derivadas segundas en $(f(s_0), g(s_0))$ coinciden con $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$. En tal caso, los a_{ij} se calculan a partir de las derivadas de F en $(f(s_0), g(s_0), h(s_0), \phi(s_0), \psi(s_0), \alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$ y las de f, g, h, ϕ y ψ en s_0.

Lo anterior se demuestra como lo hemos hecho para el caso (1.35): el problema (1.18) con

$$(u_{xx}(f(s_0), g(s_0)), u_{xy}(f(s_0), g(s_0)), u_{yy}(f(s_0), g(s_0)) = (\alpha_0, \beta_0, \gamma_0),$$

se reduce mediante el cambio de variables (1.36) a un problema de Cauchy del tipo (1.19) con $u_{tt}(s_0, 0) = \gamma_0$ para algún nuevo γ_0, h y χ analíticas cerca de $s = s_0$, con G analítica en sus variables $(s, t, z, p, q, \alpha, \beta, \gamma)$ cerca de

$$(s_0, 0, h(s_0), h'(s_0), \chi(s_0), h''(s_0), \chi'(s_0), \gamma_0)$$

y

$$G(s_0, 0, h(s_0), h'(s_0), \chi(s_0), h''(s_0), \chi'(s_0), \gamma_0) = 0.$$

Además, (1.39) es equivalente - como se puede comprobar mediante el cambio de variables (1.36) - a la condición

$$\frac{\partial G}{\partial \gamma}(s_0, 0, h(s_0), h'(s_0), \chi(s_0), h''(s_0), \chi'(s_0), \gamma_0) \neq 0.$$

En tal caso, el teorema de la función implícita para funciones analíticas muestra que (1.19) con $u_{tt}(s_0, 0) = \gamma_0$, es equivalente a un problema del tipo

$$\begin{cases} u_{tt} = H(s, t, u, u_s, u_t, u_{ss}, u_{st}), \\ u(s, 0) = h(s), \\ u_y(s, 0) = \chi(s). \end{cases} \tag{1.40}$$

con h y χ analíticas cerca de $s = s_0$, H analítica en sus variables cerca de $(s_0, 0, h(s_0), h'(s_0), \chi(s_0), h''(s_0), \chi'(s_0))$ y tal que

$$H(s_0, 0, h(s_0), h'(s_0), \chi(s_0), h''(s_0), \chi'(s_0)) = \gamma_0.$$

Entonces, el Teorema 3 nos garantiza que (1.40) tiene una única solución analítica en un entorno de $(s_0, 0)$. Los cambios de variables analíticos que hemos hecho para pasar de (1.18) al problema equivalente (1.40), nos aseguran que lo mismo es cierto para (1.18) con el valor admisible $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$.

La unicidad en el teorema de Cauchy-Kowalevsky se refiere sólo a la de soluciones analíticas asociadas a un valor admisible y no excluye la existencia de soluciones que no sean analíticas. Las demostraciones de estos resultados las podéis encontrar en el capítulo 3 del libro de Fritz John. *Partial Differential Equations.*

Las condiciones que impone el teorema de Cauchy-Kowalevsky son en muchos casos necesarias para poder afirmar la existencia de una solución local a algunos problema de Cauchy. Por ejemplo, el problema de Cauchy lineal

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0\,, \\ u(x,0) = h(x)\,, \\ u_y(x,0) = 0\,. \end{cases} \tag{1.41}$$

no tiene una solución de clase C^2 en un entorno de $(0,0)$ si h no es analítica en un entorno de 0 - puesto que como aprenderéis más adelante - toda solución C^2 de la ecuación de Laplace en una bola $B_\varrho(x_0, y_0)$ es analítica en el interior de la bola. Por ello, si (2.19) tiene una solución C^2 cerca $(0,0)$, entonces $u(x,0) = h(x)$ es necesariamente analítica cerca de 0 y (2.19) no puede tener una solución C^2 si h no es analítica cerca de $x = 0$.

Condiciones iniciales o condiciones de contorno

Estos conceptos los entenderemos con algunos ejemplos asociados a la ecuación de Laplace y a la ecuación del calor:

- El problema de contorno o problema de Dirichlet asociado a la ecuación de Laplace en un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ y con dato de contorno o de Dirichlet φ en $C(\partial\Omega)$, consiste en encontrar u en $C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, que verifique

$$\begin{cases} \triangle u = 0 & \text{en } \Omega, \\ u = \varphi & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

- El problema de condiciones iniciales asociado a la ecuación del calor en $\mathbb{R}^n$ y con dato inicial φ en $C(\mathbb{R}^n)$, consiste en encontrar u en $C^{2,1}(\mathbb{R}^n \times (0,+\infty)) \cap C(\mathbb{R}^n \times [0,+\infty))$ tal que

$$\begin{cases} \triangle u - \partial_t u = 0 & \text{en } \mathbb{R}^n \times (0,+\infty), \\ u(x,0) = \varphi(x) & \text{en } \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

- El problema de condiciones iniciales con condición de contorno nula de tipo Dirichlet para la ecuación del calor en $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ y con dato inicial f en $C(\overline{\Omega})$, consiste en encontrar u en $C^{2,1}(\Omega\times(0,+\infty))\cap C(\overline{\Omega}\times[0,+\infty))$ que verifique

$$\begin{cases} \triangle u - \partial_t u = 0 & \text{en } \Omega \times (0, +\infty), \\ u(x,0) = f(x) & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \times [0, +\infty). \end{cases}$$

La condición de contorno se dice de tipo Neumann nula, cuando la condición en la frontera lateral es:

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \nabla u \cdot \nu = 0, \text{ en } \partial\Omega \times (0, +\infty),$$

donde ν es el vector normal unitario exterior a $\partial\Omega$.

Problema bien planteado

J. Hadamard introdujo el concepto de problema bien planteado en los términos siguientes: un problema está bien planteado si *existe solución*, *es única* y *depende continuamente de los datos iniciales.*

Un ejemplo de Hadamard: El problema de Cauchy para la ecuación

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, \\ u(x,0) = u_y(x,0) = 0. \end{cases}$$

está mal planteado en el sentido de Hadamard, pues si resolvemos

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, \\ u(x,0) = n^{-1} \sin nx, \\ u_y(x,0) = 0, \end{cases}$$

su solución es

$$u_n(x,y) = \frac{1}{n} \sin nx \cosh ny,$$

y no hay dependencia continua porque aunque los datos iniciales sean muy pequeños (n muy grande), la solución tiende a infinito con n para $y \neq 0$.

Una aclaración importante: que un problema esté bien planteado o no depende de la elección del espacio en que se busquen las soluciones. Un problema puede tener más de una solución pero sólo una si nos restringimos a una determinada clase de funciones. La dependencia continua siempre se referirá a la manera en que se mida la continuidad, dependerá del espacio en el que se midan los datos y de aquél donde se mida el tamaño de las soluciones que se encuentren.

Los ejemplos anteriores muestran que el problema de Cauchy no está en general bien planteado: no hay en general dependencia continua de los datos, como muestra el ejemplo de Hadamard. Sin embargo, los problemas con condiciones iniciales y condiciones de contorno están en general bien planteados para ciertas elecciones de los espacios donde se eligen los datos y donde se encuentran las soluciones.

Capítulo 2

Ondas en una dimensión

2.1. Deducción de la ecuación

Tenemos una cuerda que se mueve y dos variables (x,t): $(x,u(x,t))$ es la posición de la cuerda en tiempo $t \geq 0$, $\rho(x)$ es la densidad de la cuerda, que se supone independiente del tiempo, $T(x,t)$ denota la magnitud de la tensión de la cuerda en $(x,u(x,t))$, una fuerza que actúa en la dirección de la tangente a la posición de la cuerda en tiempo t y $F(x,t)$ es la densidad de la magnitud de una fuerza vertical que actúa sobre la cuerda.

Consideramos un trozo de cuerda, de x a $x+h$. Por la segunda ley de Newton, la fuerza total que actúa sobre el segmento de cuerda entre $(x,u(x,t))$ y $(x+h,u(x+h,t))$, es igual a la masa por la aceleración:

$$\begin{aligned} T(x+h,t)\frac{(1,u_x(x+h,t))}{\sqrt{1+u_x^2(x+h,t)}} - T(x,t)\frac{(1,u_x(x,t))}{\sqrt{1+u_x^2(x,t)}} \\ + (0,1)\int_x^{x+h} \rho(s)F(s,t)\,ds = (0,1)\int_x^{x+h} \rho(s)u_{tt}(s,t)\,ds. \end{aligned}$$

La primera componente de esta ecuación muestra que

$$\frac{T(x,t)}{\sqrt{1+u_x^2(x,t)}}$$

es una función constante de x que supondremos igual a $T(t)$. La segunda ecuación implica que

$$u_{tt} - c^2(x,t)u_{xx} = F, \text{ si } c^2(x,t) = \frac{T(t)}{\rho(x)} \ .$$

Si suponemos que los extremos de la cuerda de longitud l permanecen fijos en todo tiempo en las posiciones $(0,0)$ y $(l,0)$, que la posición inicial de la cuerda, $u(x,0) = f(x)$ y la velocidad inicial de la cuerda, $u_t(x,0) = g(x)$, son funciones conocidas, concluimos que u es la solución del problema de Cauchy con condiciones de contorno de tipo Dirichlet

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2(x,t)u_{xx} = F, & \text{si } 0 < x < l \text{ y } t > 0, \\ u(x,0) = f(x), & \text{si } 0 \leq x \leq l, \\ u_t(x,0) = g(x), & \text{si } 0 \leq x \leq l, \\ u(0,t) = u(l,t) = 0, & \text{si } t \geq 0. \end{cases}$$

Si suponemos que $c^2(x,t) \equiv c^2$ es constante, la ecuación asociada es la ecuación de ondas unidimensional:

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = F.$$

2.2. Solución de d'Alembert

Buscamos la solución general de la ecuación homogénea

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0. \tag{2.1}$$

Haciendo el cambio de variable $\xi = x + ct\,, \eta = x - ct$ (ya hecho en clase; sección 1.3) se llega a la conclusión

$$-4c^2 v_{\xi\eta}(\xi,\eta) = \big(u_{tt} - c^2 u_{xx}\big)\left(\tfrac{\xi+\eta}{2}, \tfrac{\xi-\eta}{2c}\right)$$

y que la solución general de (2.1) será de la forma $v(\xi,\eta) = \varphi(\xi) + \psi(\eta)$. Esto implica que la de (2.1) es

$$u(x,t) = \varphi(x+ct) + \psi(x-ct).$$

Las gráficas de $\varphi(x+ct)$ y $\psi(x-ct)$ se dibujan desplazando las de $\varphi(x)$ y $\psi(x)$ a la izquierda y derecha, respectivamente, en un cantidad ct. Se dice que u es la suma de una *onda regresiva* (φ) y de una *onda progresiva* (ψ); y que c es la *velocidad de propagación.*

2.3. Problema de Cauchy para la ecuación de ondas

Buscamos la solución $C^2(\mathbb{R} \times [0,+\infty))$ del problema de valores iniciales

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0\,, & x \in \mathbb{R},\ t > 0\,, \\ u(x,0) = f(x)\,, & x \in \mathbb{R}\,, \\ u_t(x,0) = g(x)\,, & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{2.2}$$

para f y g en $C^2(\mathbb{R})$ y $C^1(\mathbb{R})$ respectivamente. Hay que determinar φ y ψ tales que $u(x,t) = \varphi(x+ct) + \psi(x-ct)$. Haciendo $t = 0$ en u y en u_t, tendremos que $\varphi(x)+\psi(x)=f(x)$, $\varphi'(x)+\psi'(x)=f'(x)$ y $\varphi'(x)-\psi'(x)=\frac{1}{c}\,g(x)$. Resolviendo este sistema de ecuaciones concluimos que

$$\varphi(x)=\frac{1}{2}f(x)+\frac{1}{2c}\int_0^x g(s)\,ds+k, \quad \psi(x)=\frac{1}{2}f(x)-\frac{1}{2c}\int_0^x g(s)\,ds-k, \tag{2.3}$$

para alguna constante k - que podemos suponer que es idénticamente nula - porque su presencia no modifica el cálculo de $u(x,t)$, lo que da

$$u(x,t)=\frac{f(x+ct)+f(x-ct)}{2}+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\,ds. \tag{2.4}$$

El razonamiento que utilizado para llegar a la fórmula (2.4) implica la unicidad de solución de (2.2) en la clase de soluciones en $C^2(\mathbb{R}\times[0,+\infty))$. Además, si f está $C^2(\mathbb{R})$ y g en $C^1(\mathbb{R})$, se comprueba fácilmente que (2.4) define una solución en $C^2(\mathbb{R}\times[0,+\infty))$ del problema de Cauchy homogéneo asociado a la ecuación de ondas (2.2). Si os fijáis, la fórmula (2.4) también define una solución en $C^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ del problema

$$\begin{cases} u_{tt}-c^2u_{xx}=0\,, & x\in\mathbb{R},\ t\in\mathbb{R}\,,\\ u(x,0)=f(x)\,, & x\in\mathbb{R}\,,\\ u_t(x,0)=g(x)\,, & x\in\mathbb{R}, \end{cases}$$

lo que es la razón de que en el lenguaje coloquial entre los expertos en EDP, se diga que la ecuación de ondas es un ejemplo de una ecuación reversible en el tiempo: se puede resolver tanto hacia adelante como hacia atrás, las ondas no salen de la nada y todas tienen un pasado.

Si f es par o impar respecto a un punto l; es decir, cuando $f(l+x)=f(l-x)$, para todo x en $\mathbb{R}$, en el primer caso; $f(l+x)=-f(l-x)$ en el segundo; entonces

$$\frac{f(x+ct)+f(x-ct)}{2}$$

es respectivamente par o impar respecto al mismo punto l. Lo mismo ocurre con

$$\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\,ds,$$

cuando g es par o impar respecto a $x=l$.

Finalmente, para calcular $u(x,t)$ con $(x,t)\in\mathbb{R}\times[0,+\infty)$, necesitamos conocer las funciones φ y ψ en toda la recta. Si limitamos el conjunto donde queremos conocer $u(x,t)$ a los $(x,t)\in[a,b]\times[0,T]$, basta con calcular φ en $[a,b+cT]$ y ψ en $[a-cT,b]$.

2.4. Dominios de dependencia y de influencia

Fijado (x_0, t_0), $t_0 > 0$, llamamos triángulo característico $T(x_0, t_0)$ asociado a (x_0, t_0) al triángulo cuyos vertices son (x_0, t_0), $(x_0 + ct_0, 0)$ y $(x_0 - ct_0, 0)$. Los últimos son los puntos de intersección de las rectas características, $x \pm ct = x_0 \pm t_0$, que pasan por (x_0, t_0) con la recta $t = 0$.

Dependencia. La solución en (x, t) depende del valor de f (posición inicial) en dos puntos, $x - ct$ y $x + ct$ y del valor de g (velocidad inicial) en el intervalo, $[x - ct, x + ct]$.

Influencia. El valor de f en x_0 interviene en el valor de la solución sobre los puntos que están en las rectas $x - ct = x_0$ y $x + ct = x_0$. El valor de g en x_0 interviene en el valor de la solución sobre los puntos que están en la región $x - ct < x_0 < x + ct$.

Suponer que f vive en el intervalo $[a, b]$; es decir, que

$$\mathrm{sop}(f) = \overline{\{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\}} = [a, b]$$

y que g es idénticamente nula; mostrar dónde vive la solución. Lo mismo, pero cambiando f y g.

2.5. Ecuación no homogénea

Vamos a resolver

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = F\,, & x \in \mathbb{R},\ t > 0\,, \\ u(x, 0) = 0\,, & x \in \mathbb{R}\,, \\ u_t(x, 0) = 0\,, & x \in \mathbb{R}\,. \end{cases} \tag{2.5}$$

Con el mismo cambio de variables,

$$v(\xi, \eta) = u\left(\frac{\xi + \eta}{2}, \frac{\xi - \eta}{2c}\right),$$

queda

$$-4c^2 v_{\xi\eta} = F\left(\frac{\xi + \eta}{2}, \frac{\xi - \eta}{2c}\right).$$

De $u(x, 0) = 0$, se deduce $v(\xi, \xi) = 0$ y derivando, $v_\xi(\xi, \xi) + v_\eta(\xi, \xi) = 0$. De $u_t(x, 0) = 0$ se deduce que $v_\xi(\xi, \xi) - v_\eta(\xi, \xi) = 0$. Por tanto,

$$v(\xi, \xi) = v_\xi(\xi, \xi) = v_\eta(\xi, \xi) = 0$$

y el dato de Cauchy de v a lo largo de la recta diagonal, $\xi = \eta$, es nulo.

Por el Teorema Fundamental del cálculo, si (ξ, η) está en el semiplano $u > v$, dibujando en un plano de coordenadas (u, v) el triángulo de vértices

(ξ,η), (ξ,ξ) y (η,η), que denotamos $T(\xi,\eta)$, obtenemos que

$$\begin{aligned}
v_\xi(\xi,\eta) &= -\int_\eta^\xi v_{\xi\eta}(\xi,v)\,dv,\\
v(\xi,\eta) &= \int_\eta^\xi v_\xi(u,\eta)\,du = -\int_\eta^\xi \left(\int_\eta^u v_{\xi\eta}(u,v)dv\right) du\\
&= -\int_{T(\xi,\eta)} v_{\xi\eta}(u,v)dudv\\
v(\xi,\eta) &= \frac{1}{4c^2}\int_{T(\xi,\eta)} F\left(\frac{u+v}{2},\frac{u-v}{2c}\right) dudv.
\end{aligned}$$

Con el cambio de variables de integración, $u = r + cs$, $v = r - cs$ y recordando que, $\xi = x + ct$, $\eta = x - ct$, el triángulo $T(\xi,\eta)$ se transforma en el triángulo característico $T(x,t)$ de vértices (x,t), $(x-ct,0)$ y $(x+ct,0)$, $dudv = 2c\,drds$ y

$$u(x,t) = \frac{1}{2c}\int_{T(x,t)} F(r,s)\,drds = \frac{1}{2c}\int_0^t \left(\int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} F(r,s)\,dr\right) ds, \quad (2.6)$$

El triángulo $T(x_0,t_0)$ denota el triángulo característico asociado a (x_0,t_0). Este triángulo es el *dominio de dependencia* de $u(x_0,t_0)$ con respecto a los valores de F.

El valor de F en (x_0,t_0) interviene (*su dominio de influencia*) en el cálculo de los valores de la solución u en los puntos de la región comprendida entre las características que pasan por (x_0,t_0) y situada encima de la recta horizontal $t = t_0$.

Si $F(\,\cdot\,,t)$ es par o impar respecto a $l \in \mathbb{R}$, para todo $t \geq 0$, entonces $u(\,\cdot\,,t)$ es respectivamente par o impar respecto a $l \in \mathbb{R}$, para todo $t \geq 0$.

Es fácil comprobar que la función definida mediante (2.6) está en $C^2(\mathbb{R}\times[0,+\infty))$ y verifica (2.5) si F está en $C^1(\mathbb{R}\times[0,+\infty))$. En tal caso, el corolario del teorema de convergencia dominada permite ver que u es dos veces diferenciable en $\mathbb{R}\times(0,+\infty)$ con

$$\begin{aligned}
u_t &= \frac{1}{2}\int_0^t F(x+c(t-s),s) + F(x-c(t-s),s)\,ds,\\
u_x &= \frac{1}{2c}\int_0^t F(x+c(t-s),s) - F(x-c(t-s),s)\,ds,\\
u_{tt} &= F(x,t) + \frac{c}{2}\int_0^t F_r(x+c(t-s),s) - F_r(x-c(t-s),s)\,ds,\\
u_{xx} &= \frac{1}{2c}\int_0^t F_r(x+c(t-s),s) - F_r(x-c(t-s),s)\,ds,\\
u_{tx} &= \frac{1}{2}\int_0^t F_r(x+c(t-s),s) + F_r(x-c(t-s),s)\,ds
\end{aligned}$$

y el teorema de convergencia dominada muestra que estas derivadas son continuas en $\mathbb{R} \times [0, +\infty)$. La tercera y cuarta fórmula anteriores muestran que u verifica (2.5).

Además, como el método para llegar a (2.6) sólo requiere aplicar dos veces el teorema fundamental del cálculo, éste implica la unicidad de solución de (2.6) en la clase de soluciones que están en $C^2(\mathbb{R} \times [0, +\infty))$.

La solución completa del problema de Cauchy no homogéneo

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x,t)\,, & x \in \mathbb{R},\ t > 0\,, \\ u(x,0) = f(x)\,, & x \in \mathbb{R}\,, \\ u_t(x,0) = g(x)\,, & x \in \mathbb{R}\,, \end{cases} \tag{2.7}$$

es

$$u(x,t) = \frac{f(x+ct) + f(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\,ds + \frac{1}{2c}\int_0^t \int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} F(r,s)\,drds. \tag{2.8}$$

y es una solución clásica de (2.7) en $C^2(\mathbb{R} \times [0, +\infty))$, si f está en $C^2(\mathbb{R})$, g en $C^1(\mathbb{R})$ y F en $C^1(\mathbb{R} \times [0, +\infty))$.

2.6. Soluciones generalizadas o débiles.

La fórmula (2.8) tiene también sentido cuando f, g y F son sólo continuas o incluso cuando f, g y F son sólo localmente integrables en $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R} \times [0, +\infty)$ respectivamente. Observad que en tal caso, u podría no ser derivable y *no sería una solución clásica* de (2.7). Sin embargo, se puede comprobar que en esos casos, la función u definida en $\mathbb{R} \times [0, +\infty)$ mediante (2.8) está en $L^1_{loc}(\mathbb{R} \times [0, +\infty))$ y verifica

$$\int_{\mathbb{R}\times(0,+\infty)} u\left(\xi_{tt} - c^2 \xi_{xx}\right)\,dxdt = \int_{\mathbb{R}\times(0,+\infty)} F\xi\,dxdt + \int_{\mathbb{R}} g(x)\xi(x,0)\,dx - \int_{\mathbb{R}} f(x)\xi_t(x,0)\,dx, \quad \text{para toda } \xi \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times [0, +\infty)), \tag{2.9}$$

lo que también verifica la solución clásica de (2.7) cuando f, g y F son regulares. Por ello, cuando una función u en $L^1_{loc}(\mathbb{R} \times [0, +\infty))$ verifica (2.9), se dice que u es una solución débil de (2.7). Fijaros que este concepto de solución no requiere que u tenga derivadas clásicas. Aún así, las soluciones débiles son también únicas bajo algunas condiciones adicionales sobre f, g y F.

Por otro lado, en la vida real aparecen de forma natural datos f, g y F que no están en $C^2(\mathbb{R})$, $C^1(\mathbb{R})$ o en $C^1(\mathbb{R}\times[0,+\infty))$; por ejemplo, cuando f es lineal a trozos (una cuerda que tiene esquinas). En esos casos, la solución u es regular sólo en ciertas regiones separadas por rectas en las que no es C^2 (ni siquiera C^1 a veces). Estas *singularidades* de u aparecen a partir de las singularidades de f, g y F y se *propagan-ocurren a lo largo de las rectas características* que pasan por las singularidades de f, g y F.

Este efecto de propagación de las singularidades de los datos a lo largo de las curvas características es típico de las ecuaciones lineales de primer orden y de las ecuaciones hiperbólicas de segundo orden.

Por ejemplo, si $f=|x|$, $g\equiv 0$ y $F\equiv 0$, la solución de (2.7) es

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left[|x+ct|+|x-ct|\right],$$

que es C^∞ en todo $\mathbb{R}\times[0,+\infty)$ excepto en las rectas características $x\pm ct=0$, las únicas curvas características de la ecuación $u_{tt}-c^2u_{xx}=0$ que pasan por $(0,0)$. En este caso u es continua en $\mathbb{R}\times[0,+\infty)$, donde u es diferenciable

$$\nabla u=\frac{1}{2}\left[\operatorname{sgn}(x+ct)(1,c)+\operatorname{sgn}(x-ct)(1,-c)\right],$$

y la singularidad de $|x|'=\operatorname{sgn}(x)$ en $x=0$, se propaga en tiempo futuros a lo largo de estas características: lugares donde $u(\cdot,t)$ tiene una singularidad que proviene de singularidades de alguno de los datos iniciales. En general la solución de (2.4),

$$u(x,t)=\varphi(x+ct)+\psi(x-ct),$$

con

$$\varphi(x)=\frac{1}{2}f(x)+\frac{1}{2c}\int_0^x g(s)\,ds,\quad \psi(x)=\frac{1}{2}f(x)-\frac{1}{2c}\int_0^x g(s)\,ds,$$

tendrá singularidades a lo largo de las características $x\pm ct=x_0$, donde x_0 es una singularidad de f y/o g respectivamente y las singularidades de los datos iniciales en $\mathbb{R}$ se "propagan"para la solución u a lo largo de la características $x\pm ct=x_0$.

Como ejemplo de este efecto de propagación de las singularidades a lo largo de las características en una ecuación de primer orden, la solución del problema

$$\begin{cases} u_x+u_y=0, & \text{en } \mathbb{R}\times[0,+\infty),\\ u(x,0)=\varphi(x), & \text{en } \mathbb{R},\end{cases}\tag{2.10}$$

es

$$u(x,y)=\varphi(x-y),\tag{2.11}$$

que sólo tiene singularidades a lo largo de las rectas características $x-y=x_0$, donde x_0 es una singularidad de φ.

Además, si φ está sólo en $L^1_{loc}(\mathbb{R})$, la función definida mediante (2.11) está en $L^1_{loc}(\mathbb{R}\times[0,+\infty))$, verifica

$$\int_{\mathbb{R}\times(0,+\infty)} u\,(\xi_x+\xi_y)\;dxdy = -\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\xi(x,0)\,dx, \tag{2.12}$$

para toda ξ en $C_0^\infty(\mathbb{R}\times[0,+\infty))$ - lo que también verifica la solución clásica de (2.10) cuando φ es regular - y se dice en este sentido no clásico, que tal u es una solución débil de (2.10). Como en el caso anterior, se puede probar la unicidad de soluciones débiles de (2.10) bajo algunas condiciones adicionales sobre φ.

Para completar algunos detalles de esta sección probamos que la u definida mediante (2.11) es efectivamente una solución débil de (2.10) cuando φ está en $L^1_{loc}(\mathbb{R})$. La demostración del resultado análogo para (2.7) es similar.

Demostración. Suponemos que φ está en $L^1_{loc}(\mathbb{R})$. Si ξ está en $C_0^\infty(\mathbb{R}\times[0,+\infty))$ y tiene su soporte contenido en el interior de $(-R,R)\times[0,R)$, para algún $R>0$, podemos encontrar φ_k en $C_0^\infty(\mathbb{R})$ que converge a φ en $L^1(-2R,2R)$. Como $u_k(x,y)=\varphi_k(x-y)$ es una solución clásica de (2.10) con φ reemplazada por φ_k, u_k también es solución débil y

$$\int_{\mathbb{R}\times(0,+\infty)} u_k\,(\xi_x+\xi_y)\;dxdy = -\int_{\mathbb{R}} \varphi_k(x)\xi(x,0)\,dx, \tag{2.13}$$

para todo $k\geq 1$. Ahora,

$$\left|\int_{\mathbb{R}\times[0,+\infty)} (u_k-u)\,(\xi_x+\xi_y)\;dxdy\right| \leq 2R\|\nabla\xi\|_\infty \int_{-2R}^{2R} |\varphi_k(u)-\varphi(u)|\,du,$$

que tiende a cero si $k\to+\infty$. También,

$$\left|\int_{\mathbb{R}} (u_k-u)\,\xi(x,0)\,dx\right| \leq \|\xi\|_\infty \int_{-2R}^{2R} |\varphi_k(x)-\varphi(x)|\,dx$$

y pasando al límite cuando $k\to+\infty$ en (2.13), concluimos que (2.12) se verifica y que $u(x,y)=\varphi(x-y)$ es una solución débil de (2.10) aunque en general, u no será continua y tampoco diferenciable.

$\square$

2.7. Ondas en una semi-recta

1. *Condición de contorno de tipo Dirichlet.* Buscamos la solución del problema

$$\begin{cases} u_{tt}-c^2u_{xx}=0\,, & x>0,\ t>0\,,\\ u(x,0)=f(x)\,, & x>0\,,\\ u_t(x,0)=g(x)\,, & x>0\,,\\ u(0,t)=h(t)\,, & t>0\,. \end{cases} \tag{2.14}$$

La solución general será de la forma $u(x,t) = \varphi(x+ct) + \psi(x-ct)$, con $\varphi : [0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ y $\psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Como antes, las condiciones iniciales determinan $\varphi(x)$ y $\psi(x)$ para $x > 0$. Esto da la solución en la región $x-ct > 0$ con la misma expresión que en (2.4), eligiendo $k = 0$ en (2.3). Observad que la elección de k no cambia los valores de u en $x - ct > 0$.

Haciendo $x = 0$, tenemos $\varphi(ct)+\psi(-ct) = h(t)$, si $t \geq 0$. Esto determina $\psi(t)$ para $t < 0$:

$$\psi(t) = h(-t/c) - \varphi(-t),$$

de donde obtenemos que para $x - ct < 0$,

$$u(x,t) = \frac{f(x+ct) - f(ct-x)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{ct-x}^{x+ct} g(s)\, ds + h\left(t - \frac{x}{c}\right).$$

La regularidad de u en $x - ct > 0$ y en $x - ct < 0$ se deduce de la de f, g y h. En particular, u está C^2 en las regiones

$$\{(x,t) : x - ct > 0, x \geq 0, t \geq 0\} \text{ y } \{(x,t) : x - ct < 0, x \geq 0, t \geq 0\},$$

si f y h están en $C^2([0,+\infty))$ y g en $C^1([0,+\infty))$.

La regularidad de u sobre la recta $x = ct$ - o equivalentemente la de ψ en $x = 0$ - requiere condiciones de compatibilidad de f, g y h en $(0,0)$: observad que una regularidad C^2 de u en $[0,+\infty) \times [0,+\infty)$ implica que

$$\begin{aligned} f(0) &= u(0^+,0) = u(0,0^+) = h(0),\\ g(0) &= u_t(0^+,0) = u_t(0,0^+) = h'(0), \end{aligned}$$

y

$$c^2 f''(0) = c^2 u_{xx}(0^+,0) = u_{tt}(0,0^+) = h''(0).$$

Además, es fácil comprobar que φ está en $C^2([0,+\infty))$, si f y g están respectivamente en $C^2([0,+\infty))$ y $C^1([0,+\infty))$; y que ψ está en $C^2(\mathbb{R})$, si además h está en $C^2(\mathbb{R})$ y f, g, h verifican las condiciones de compatibilidad

$$f(0) = h(0),\ g(0) = h'(0) \text{ y } h''(0) = c^2 f''(0).$$

Cuando h es nula, la solución es la misma que la se obtiene al resolver el problema en toda la recta con los datos iniciales f y g extendidos a la recta de forma impar respecto a $x = 0$ (*Método de reflexiones*) y considerando la restricción de dicha solución al primer cuadrante.

2. *Condición de contorno de tipo Neumann.* Ahora estudiamos el problema

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0\,, & x > 0,\ t > 0\,,\\ u(x,0) = f(x)\,, & x > 0\,,\\ u_t(x,0) = g(x)\,, & x > 0\,,\\ u_x(0,t) = h(t)\,, & t > 0\,. \end{cases}$$

Como antes necesitamos calcular φ y ψ en $[0,+\infty)$ y $\mathbb{R}$ respectivamente. No hay diferencias en $x-ct>0$, donde elegimos $k=0$. En $x=0$ y $t>0$ sale, $\varphi'(ct)+\psi'(-ct)=h(t)$, si $t>0$, de donde, $\varphi'(-x)+\psi'(x)=h(-\frac{x}{c})$, si $x<0$; e integrando esta identidad en $[x,0]$,

$$\psi(x)=\varphi(-x)-c\int_0^{-\frac{x}{c}} h(\tau)\,d\tau+\beta,\ \text{para } x<0,$$

donde β es una constante a determinar. La solución del problema en $x-ct<0$ es

$$\begin{aligned}u(x,t)=\frac{f(x+ct)+f(ct-x)}{2}&+\frac{1}{2c}\left[\int_0^{x+ct} g(s)\,ds+\int_0^{ct-x} g(s)\,ds\right]\\ &-c\int_0^{t-x/c} h(s)\,ds+\beta.\end{aligned}$$

Como antes, la regularidad de u sobre la recta $x=ct$ - o equivalentemente la de ψ en $x=0$ - requiere condiciones de compatibilidad de f, g y h en $(0,0)$: observad que una regularidad C^2 de u en $[0,+\infty)\times[0,+\infty)$ requiere que

$$\begin{aligned}f'(0)&=u_x(0^+,0)=u_x(0,0^+)=h(0),\\ g'(0)&=u_{tx}(0^+,0)=u_{xt}(0,0^+)=h'(0).\end{aligned}$$

Finalmente, eligiendo $k=0$, tenemos que

$$\begin{aligned}\varphi(x)&=\frac{1}{2}f(x)+\frac{1}{2c}\int_0^x g(s)\,ds,\ \text{si } x>0,\\ \psi(x)&=\frac{1}{2}f(x)-\frac{1}{2c}\int_0^x g(s)\,ds,\ \text{si } x>0,\\ \psi(x)&=\frac{1}{2}f(-x)+\frac{1}{2c}\int_0^{-x} g(s)\,ds-c\int_0^{-\frac{x}{c}} h(s)\,ds+\beta,\ \text{si } x<0\end{aligned}$$

y es fácil comprobar que φ y ψ son C^2 en $[0,+\infty)$ y $\mathbb{R}$ respectivamente - o equivalentemente que u lo es en $[0,+\infty)\times[0,+\infty)$ - si elegimos $\beta=0$, f está en $C^2([0,+\infty))$, g y h en $C^1([0,+\infty))$ y se verifican las condiciones de compatibilidad

$$f'(0)=h(0) \text{ y } g'(0)=h'(0).$$

Cuando h es nula la solución anterior es la misma que la que se obtiene al resolver un problema en toda la recta con los datos iniciales f y g extendidos a $\mathbb{R}$ como funciones pares respecto al 0 (método de reflexiones) y restringiendo la solución hallada al primer cuadrante.

2.8. Ondas en una cuerda finita

Situamos una cuerda de longitud l entre los puntos 0 y l. El problema de la vibración de la cuerda con condiciones de contorno de tipo Dirichlet es

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0\,, & 0 < x < l,\ t > 0\,, \\ u(x,0) = f(x)\,, & 0 < x < l\,, \\ u_t(x,0) = g(x)\,, & 0 < x < l\,, \\ u(0,t) = h_0(t)\,, u(l,t) = h_1(t), & t > 0\,. \end{cases}$$

Otra vez, $u(x,t) = \varphi(x+ct)+\psi(x-ct)$ y necesitamos conocer φ en $[0,+\infty)$ y ψ en $(-\infty, l]$. Las condiciones iniciales determinan $\varphi(x)$ y $\psi(x)$ para $0 < x < l$. Con estos valores de φ y ψ podemos escribir la solución del problema en el triángulo $\{(x,t) : t > 0 \text{ y } 0 < x-ct < x+ct < l\}$. Usando las condiciones de contorno tenemos

$$\begin{aligned} \varphi(ct) + \psi(-ct) &= h_0(t), \quad t > 0, \\ \varphi(l+ct) + \psi(l-ct) &= h_1(t), \quad t > 0, \end{aligned}$$

o bien,

$$\begin{aligned} \psi(s) &= -\varphi(-s) + h_0(-s/c), \quad s < 0, \\ \varphi(l+s) &= -\psi(l-s) + h_1(s/c), \quad s > 0. \end{aligned} \tag{2.15}$$

De (2.15) vemos que empezando con lo que conocemos sobre φ y ψ en el intervalo $(0,l)$, las ecuaciones anteriores permiten paso a paso calcular $\varphi(s)$ para todo $s > 0$ y $\psi(s)$ para todo $s < l$, lo que determina u.

Las condiciones de compatibilidad de f, g, h_0 y h_1 para que u sea C^2 en $[0,l] \times [0,+\infty)$ son en este caso las siguientes

$$\begin{aligned} &f(0) = h_0(0),\ g(0) = h_0'(0),\ c^2 f''(0) = h_0''(0), \\ &f(l) = h_1(l),\ g(l) = h_0'(l),\ c^2 f''(l) = h_0''(l). \end{aligned}$$

Cuando h_0 y h_1 son nulas, la solución es la misma que la que se obtiene al resolver un problema en toda la recta con datos iniciales extendidos de forma impar en 0 y en l respectívamente (*método de reflexiones*); es decir, extendiendo f y g a $\mathbb{R}$ de forma que $f(x) = -f(-x)$ y $f(l+x) = -f(l-x)$, $g(x) = -g(-x)$ y $g(l+x) = -g(l-x)$.

Una función impar respecto a 0 y l es automáticamente periódica de periodo $2l$.

Cuando las condiciones de contorno son de tipo Neumann hay que hacer las mismas modificaciones que en el caso de la semirrecta. Si las condiciones son nulas, las extensiones requeridas son pares en 0 y en l.

Ahora hay dos extremos y pueden haber dos condiciones de contorno distintas, una de tipo Dirichlet y otra de tipo Neumann. Si son $u(0,t) = 0$

y $u_x(l,t) = 0$, se construye la solución por el método de las reflexiones extendiendo f como función impar respecto a $x = 0$ y par respecto a $x = l$, g como función par respecto a $x = l$ e impar respecto a $x = 0$ y resolviendo el problema en toda la recta.

Una función par respecto a 0 y l es automáticamente periódica de periodo $2l$.

Una función par respecto a 0 e impar respecto a l es automáticamente periódica de periodo $4l$.

2.9. Conservación de la energía

La función
$$E(t) = \int_0^l c^2 u_x^2(x,t) + u_t^2(x,t)\,dx$$
es constante en $[0,+\infty)$, si $u \in C^2([0,l]\times[0,+\infty))$ es solución de
$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0\,, & 0 < x < l,\ t > 0\,,\\ u(x,0) = f(x)\,, & 0 < x < l\,,\\ u_t(x,0) = g(x)\,, & 0 < x < l \end{cases}$$
que verifica condiciones de contorno de Dirichlet o Neumann nulas en la frontera lateral del cilindro $[0,l]\times[0,+\infty)$.

Este resultado implica la unicidad de solución al problema de Cauchy asociado a la ecuación de ondas con condiciones de contorno de tipo Dirichlet o tipo Neumann en la clase de soluciones $C^2([0,l]\times[0,+\infty))$.

El resultado también es cierto si la cuerda vibrante se remplaza por una membrana o un sólido; es decir, para otras dimensiones n del espacio euclídeo en el que se encuentre $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. En este caso, se utiliza el teorema de la divergencia para mostrar que
$$E(t) = \int_\Omega c^2|\nabla u|^2 + u_t^2\,dx$$
es constante, si $u_{tt} - c^2\Delta u = 0$ en $\Omega\times[0,+\infty) \subset \mathbb{R}^{n+1}$, u verifica condiciones de contorno de Dirichlet o Neumann nulas en la frontera lateral de Ω y $u \in C^2(\overline{\Omega}\times[0,+\infty))$.

Demostración.
$$\begin{aligned} E'(t) &= 2\int_\Omega c^2\nabla u\cdot\nabla u_t + u_t u_{tt}\,dx \qquad (2.16)\\ &= 2\int_\Omega c^2\nabla\cdot(u_t\nabla u) + u_t\left(u_{tt} - c^2\triangle u\right)dx = 2c^2\int_{\partial\Omega} u_t\nabla u\cdot\nu\,d\sigma, \end{aligned}$$
que es cero si u o su derivada normal son nulas la frontera lateral $\partial\Omega\times(0,+\infty)$. $\square$

El método anterior también permite obtener estimaciones *a priori* de soluciones del problema completo

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = F\,, & 0 < x < l,\ t > 0\,, \\ u(x,0) = f(x)\,, & 0 < x < l\,, \\ u_t(x,0) = g(x)\,, & 0 < x < l, \end{cases} \tag{2.17}$$

de las que a priori podemos suponer que son regulares y verifican condiciones de contorno de tipo Dirichlet o Neumann nulas en la frontera lateral del cilindro $[0,l] \times [0,+\infty)$. En particular, si f, g y F son regulares y verifican las condiciones necesarias de compatibilidad, la solución de (2.17) está en $C^2([0,l] \times [0,+\infty))$ (esto se puede comprobar y es un buen ejercicio) y de (2.16)

$$E'(t) = 2\int_0^l u_t F dx.$$

Integrando esta identidad en $[0,t]$, $0 \le t \le T$, vemos que

$$\sup_{0\le t\le T} \int_0^l c^2 u_x^2 + u_t^2\, dx \le \int_0^l c^2 f'^2 + g^2\, dx + 2\int_0^T \int_0^l |u_t||F|\, dxdt. \tag{2.18}$$

Por las desigualdad de Hölder y Young

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^l |u_t||F|\, dxdt &\le \int_0^T \|u_t(t)\|_{L^2(0,l)} \|F(t)\|_{L^2(0,l)}\, dt \\ &\le \sup_{0\le t\le T} \left(\int_0^l u_t^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}} \int_0^T \|F(t)\|_{L^2(0,l)}\, dt \\ &\le \frac{1}{4} \sup_{0\le t\le T} \int_0^l u_t^2\, dx + 4\left(\int_0^T \|F(t)\|_{L^2(0,l)}\, dt\right)^2. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Combinando las desigualdades (2.18) y (2.19), concluimos que existe una constante $N = N(c)$ tal que

$$\begin{aligned} &\sup_{0\le t\le T} \|u_x\|_{L^2(0,l)} + \|u_t\|_{L^2(0,l)} \\ &\qquad \le N\left[\|f'\|_{L^2(0,l)} + \|g\|_{L^2(0,l)} + \|F\|_{L^1((0,T),L^2(0,l))}\right] \\ &\qquad\qquad \le N\left[\|f'\|_{L^2(0,l)} + \|g\|_{L^2(0,l)} + \sqrt{T}\|F\|_{L^2((0,l)\times(0,T))}\right]. \end{aligned}$$

Este tipo de desigualdad, cuya demostración formal requiere suponer *a priori* que la solución es regular para justificar las cuentas, da lugar a una acotación de la solución que se denomina genéricamente acotación *a priori* de la solución: las constantes en la desigualdad final no dependen de la regularidad cualitativa de la solución (en este caso hemos necesitado que u esté en $C^2([0,l] \times [0,T])$ para justificar las cuentas). El resultado final consiste o es una acotación del tamaño en ciertos espacios de algunos entes relacionados con la solución (en este caso las derivadas primeras), en términos de otras cantidades que miden el tamaño de los datos (en esta caso f, g y F) en otros espacios, que pueden ser iguales o diferentes a los primeros.

Capítulo 3

La ecuación del calor en la recta

3.1. Deducción de la ecuación

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un sólido y $u(x,t)$ la temperatura en uno de sus puntos x en tiempo $t > 0$. Si D es una parte pequeña de Ω, la cantidad de calor en D en tiempo t es

$$Q(t) = \int_D \rho u(x,t)\, dx \ ,$$

donde ρ es la densidad de Ω. La variación total del calor en D es

$$Q'(t) = \int_D \rho u_t(x,t)\, dx.$$

Las leyes de la termodinámica dicen que el flujo del calor M, un campo vectorial, va de las regiones más calientes a las más frias y que es proporcional al gradiente de la temperatura: $M = -A\nabla u$, donde A es el calor específico.

La variación total del calor en D coincide con la cantidad neta de calor que entra y sale de D, junto los cambios de calor que son generados directamente sobre D por cambios de temperatura externos con densidad $F(x,t)$; es decir, si ν es la normal unitaria exterior a ∂D,

$$\int_D \rho u_t(x,t)\, dx = -\int_{\partial D} M \cdot \nu \, d\sigma + \int_D \rho F(x,t)\, dx,$$

$$\int_D \rho u_t(x,t)\, dx = A\int_{\partial D} \nabla u \cdot \nu \, d\sigma + \int_D \rho F(x,t)\, dx$$

y por el teorema de la divergencia

$$\int_D \left[\rho u_t(x,t) - A\triangle u(x,t) - \rho F(x,t)\right]\, dx = 0.$$

Como D es arbitrario, la temperatura verifica la ecuación

$$u_t - c^2 \triangle u = F \text{ en } D \times (0, +\infty), \ c^2 = \frac{A}{\rho}$$

y con el cambio de variables, $v(x,t) = u(cx,t)$, la ecuación se transforma en

$$v_t - \triangle v = G(x,t), \ G(x,t) = F(cx,t),$$

que se denomina *la ecuación del calor.*

Queremos resolver *el problema de valores iniciales* no homogéneo:

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = F, & x \in \mathbb{R}, \ t > 0, \\ u(x,0) = f(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{3.1}$$

"Lo natural" es buscar la solución en

$$C^2(\mathbb{R} \times (0, +\infty)) \cap C(\mathbb{R} \times [0, +\infty)) \cap L^\infty(\mathbb{R} \times (0, +\infty)),$$

si $f \in C(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ y $F \in C^\infty(\mathbb{R} \times [0, +\infty))$.

3.2. Soluciones autosemejantes

Para resolver el problema de valores inciales no homogéneo (3.1), se empieza por intentar resolver el problema de valores iniciales homogéneo

$$\begin{cases} u_{xx} - u_t = 0, & \text{en } \mathbb{R} \times (0, +\infty), \\ u(x,0) = f(x), & \text{en } \mathbb{R}. \end{cases} \tag{3.2}$$

Para ello, *buscamos primero las soluciones autosemejantes de la ecuación, $u_t - u_{xx} = 0$ y consideraremos "sumas"de estas soluciones, para obtener más soluciones. Después, intentamos determinar los "coeficientes de la suma" para que se verifiquen las condiciones iniciales.*

Si $u(x,t)$ verifica, $u_t - u_{xx} = 0$ en $\mathbb{R} \times (0, +\infty)$, también lo verifican $u_\lambda(x,t) = u(\lambda x, \lambda^2 t)$, para todo λ real y $u(x + x_0, t + t_0)$, para todo (x_0, t_0) en $\mathbb{R}^2$.

¿Existen soluciones autosemejantes, es decir, tales que

$$u(\lambda x, \lambda^2 t) = \lambda^\alpha u(x,t),$$

para algún α y todo $\lambda > 0$? Si esto ocurre, haciendo $\lambda = 1/\sqrt{t}$, tenemos que $u(x,t) = t^{\alpha/2} u(x/\sqrt{t}, 1)$, es decir,

$$u(x,t) = t^{\alpha/2} \Phi(x/\sqrt{t}), \ \text{si } \Phi(x) = u(x,1).$$

A las soluciones de este tipo se las llama *soluciones autosemejantes* de la ecuación.

Si $u(x,t) = t^{\alpha/2}\Phi(x/\sqrt{t})$ es una solución autosemejante, Φ tiene que verificar

$$\Phi''(s) + \frac{s}{2}\Phi'(s) - \frac{\alpha}{2}\Phi(s) = 0 \tag{3.3}$$

y si pedimos a la solución que conserve el calor total, es decir, que $u(\,\cdot\,,t)$ sea integrable en $\mathbb{R}$ para todo $t > 0$ y que la integral en x de u no dependa de $t > 0$,

$$\int_{\mathbb{R}} u(x,t)\,dx = t^{\frac{\alpha+1}{2}} \int_{\mathbb{R}} \Phi(y)\,dy,$$

resulta que α debe ser igual a -1. En este caso, (3.3) se reduce a

$$(\Phi' + \frac{s}{2}\Phi)' = 0,$$

cuya solución general es

$$\Phi(s) = \alpha e^{-\frac{s^2}{4}} \int_0^s e^{\frac{\tau^2}{4}}\,d\tau + \beta e^{-\frac{s^2}{4}},\ \text{si } \alpha,\ \beta \in \mathbb{R}.$$

De estas sólo la segunda es integrable en $\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{s^2}{4}} \int_0^s e^{\frac{\tau^2}{4}}\,d\tau ds &= \int_0^{+\infty}\int_0^1 se^{-\frac{s^2}{4}(1-\tau^2)}\,d\tau ds \\ &= \int_0^1\int_0^{+\infty} se^{-\frac{s^2}{4}(1-\tau^2)}\,dsd\tau = 2\int_0^1 \frac{d\tau}{1-\tau^2} = +\infty\end{aligned}$$

y nos quedamos con la solución, $\Phi(s) = e^{-s^2/4}$. Así

$$u(x,t) = \beta t^{-1/2} e^{-x^2/4t}$$

y elegimos la constante β para que la integral en x de $v(x,t)$ sea 1,

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-x^2/4t}.$$

Esta función verifica, $u_t - u_{xx} = 0$, en $\mathbb{R} \times (0,+\infty)$. Si la trasladamos en la dirección espacial en una dirección dada, $y \in \mathbb{R}$, es decir, consideramos $u(x-y,t)$, también verifica la ecuación del calor en $\mathbb{R} \times (0,+\infty)$.

La función

$$G(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-|x|^2/4t}, & \text{si } t > 0, \\ 0, & \text{si } t \leq 0, \end{cases}$$

se denomina el *núcleo de Gauss* o *núcleo Gaussiano.*

Escogiendo para cada y un valor $f(y)$ y "sumando sobre todos los valores de y", obtenemos

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}} G(x-y,t) f(y)\,dy, \tag{3.4}$$

que es una *suma* formal de soluciones y quizás una solución del problema de valores iniciales homogéneo (3.2).

Cada término del integrando en la fórmula anterior es solución de la ecuación del calor en las variables (x, t). Para que u sea solución, necesitamos primero, que la fórmula (3.4) tenga sentido y después, que se pueda derivar bajo el signo integral. Usando el teorema de la convergencia dominada se puede probar que esto es así si $f \in L^\infty(\mathbb{R})$. Lo mismo es cierto si $f \in L^p(\mathbb{R})$ y $1 \leq p \leq \infty$. Lo último se deduce fácilmente a partir de las acotaciones en el Teorema 4.

3.3. La solución al problema de valores iniciales

¿Cuánto vale la solución anterior si $t = 0$? Haciendo el cambio de variables, $x - y = \sqrt{t}\, z$, resulta que

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x - \sqrt{t}\, y) e^{-\frac{y^2}{4}}\, dy.$$

De esta fórmula, de la acotación,

$$|f(x - \sqrt{t}\, y)\, e^{-\frac{y^2}{4}}| \leq \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\, e^{-\frac{y^2}{4}}$$

y del teorema de la convergencia dominada es fácil deducir que

$$\lim_{t \to 0^+} u(x,t) = f(x),$$

si f es continua en x y acotada en $\mathbb{R}$.

Teorema 4. *Si $f \in C(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$, la función definida por* (3.4) *verifica que, $u \in C^\infty(\mathbb{R} \times (0, +\infty)) \cap C(\mathbb{R} \times [0, +\infty)) \cap L^\infty(\mathbb{R} \times [0, +\infty))$ y es solución de* (3.2)*.*

Demostración. Como $G(x,t) = t^{-\frac{1}{2}} \Phi(\frac{x}{\sqrt{t}})$, $\Phi(s) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} e^{-\frac{s^2}{4}}$ y $\partial_t G - \partial_x^2 G = 0$, en $\mathbb{R} \times (0, +\infty)$, se verifica que

$$\begin{aligned}\partial_x^\alpha \partial_t^\beta G(x,t) &= \partial_x^{\alpha+2\beta} G(x,t) \\ &= t^{-\frac{1+\alpha+2\beta}{2}} \Phi^{(\alpha+2\beta)}(\frac{x}{\sqrt{t}}) = t^{-\frac{1+\alpha+2\beta}{2}} P_{\alpha+2\beta}(\frac{x}{\sqrt{t}}) e^{-\frac{x^2}{4t}},\end{aligned}$$

donde $P_{\alpha+2\beta}$ es un polinomio de grado $\alpha + 2\beta$. De estas fórmulas, se deduce que para todo $\epsilon > 0$ y $R > 0$ existe $N = N(\epsilon, R, \alpha, \beta) > 0$ tal que

$$|\partial_x^\alpha \partial_t^\beta G(x - y, t)| \leq N e^{-y^2/N}, \text{ si } |x| \leq R \text{ y } \epsilon \leq t \leq R.$$

Esto y el teorema de convergencia dominada muestran que u está en $C^\infty(\mathbb{R}\times(0,+\infty))$ si $f \in L^\infty(\mathbb{R})$. Además, como

$$\int_{\mathbb{R}} G(x-y,t)\,dy = \int_{\mathbb{R}} G(z,t)\,dz = 1, \text{ si } t>0, \tag{3.5}$$

se verifica que

$$|u(x,t)| \le \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$$

y u está acotada en el semiplano superior.

Para mostrar la continuidad de u en $\mathbb{R}\times\{0\}$ se utiliza la continuidad de f en $\mathbb{R}$, el decaimiento en el infinito y la propiedad (3.5) del nucleo Gaussiano: fijado $x_0 \in \mathbb{R}$ y dado $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que $|f(y) - f(x_0)| \le \epsilon$, si $|y - x_0| < \delta$ y

$$\begin{aligned}
|u(x,t) - f(x_0)| \le & \int_{B_\delta(x_0)} G(x-y,t)|f(y)-f(x_0)|\,dy \\
& + \int_{\mathbb{R}^n\setminus B_\delta(x_0)} G(x-y,t)|f(y)-f(x_0)|\,dy \\
& \le \epsilon + 2\|f\|_\infty \int_{\mathbb{R}^n\setminus B_\delta(x_0)} G(x-y,t)\,dy,
\end{aligned} \tag{3.6}$$

para todo (x,t) en el semiplano superior. Por otro lado, $\delta \le |y-x_0| \le 2|y-x|$, si $|x-x_0| \le \delta/2$ y $|y-x_0| \ge \delta$, de donde

$$G(x-y,t) \le (4\pi t)^{-\frac{1}{2}}\, e^{-\frac{|x-y|^2}{8t}} e^{-\frac{|y-x|^2}{8t}} \le (4\pi t)^{-\frac{1}{2}}\, e^{-\frac{\delta^2}{32t}} e^{-\frac{|y-x|^2}{8t}}$$

y

$$\int_{\mathbb{R}^n\setminus B_\delta(x_0)} G(x-y,t)\,dy \le N e^{-\frac{\delta^2}{32t}}, \text{ si } |x-x_0| \le \delta/2\,. \tag{3.7}$$

De (3.6) y (3.7) se deduce que

$$|u(x,t) - f(x_0)| \le \epsilon + 2N\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\, e^{-\frac{\delta^2}{32t}}, \text{ si } |x-x_0| \le \delta/2$$

y que u es continua en $(x_0, 0)$.

$\square$

Algunas propiedades de la solución obtenida:

- Si $m \le f(x) \le M$, entonces $m \le u(x,t) \le M$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y $t > 0$, es decir, las temperaturas máxima y mínima originales no se pueden superar ni por arriba ni por abajo.

Demostración. Escribir la fórmula para $u(x,t)$, utilizar que $m \le f \le M$ y que $\int_{\mathbb{R}} G(z,t)\,dz = 1$, si $t > 0$. $\square$

• *Conservación del calor*: $\int_{\mathbb{R}} u(x,t)\,dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx$, para todo $t > 0$, si además f está en $L^1(\mathbb{R})$.

Demostración. Si f tiene soporte compacto, $u(\,\cdot\,,t)$ y sus derivadas decaen hacia cero si x tiende hacia $\pm\infty$ y

$$\partial_t \int_{\mathbb{R}} u(x,t)\,dx = \int_{\mathbb{R}} \partial_x^2 u(x,t)\,dx = 0.$$

El caso general se obtiene aproximando f con funciones de soporte compacto. También se puede utilizar el siguiente razonamiento que justifica el teorema de Fubini-Tonelli:

$$\int_{\mathbb{R}} u(x,t)\,dx = \int_{\mathbb{R}} f(y) \left(\int_{\mathbb{R}} G(x-y,t)\,dx \right) dy = \int_{\mathbb{R}} f(y)\,dy.$$

$\square$

• Si además f está en $L^2(\mathbb{R})$, entonces

$$\int_{\mathbb{R}} u^2(x,T)\,dx + 2\int_0^T \int_{\mathbb{R}} |\partial_x u(x,t)|^2\,dxdt = \int_{\mathbb{R}} f^2(x)\,dx, \tag{3.8}$$

para todo $T > 0$. Aquí sólo explicamos la demostración cuando f tiene soporte compacto.

Demostración. Si f tiene soporte compacto, $u(\,\cdot\,,t)$ y sus derivadas decaen hacia cero si x tiende hacia $\pm\infty$ y

$$0 = u\left(\partial_t u - \partial_x^2 u\right) = \tfrac{1}{2}\partial_t u^2 + (\partial_x u)^2 - \partial_x(u\partial_x u).$$

La identidad es consecuencia de integrar la fórmula anterior en $\mathbb{R}\times(0,T)$. $\square$

• El análogo de la identidad anterior para cilindros acotados es la siguiente fórmula: si $u \in C^2(\overline{\Omega}\times(0,+\infty)) \cap C(\overline{\Omega}\times[0,+\infty))$ verifica

$$\begin{cases} \partial_t u - \triangle u = 0, & \text{en } \Omega\times(0,+\infty), \\ u(x,0) = f(x) & \text{en } \Omega, \\ u \text{ o } \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, & \text{en } \partial\Omega\times(0,T). \end{cases}$$

Entonces,

$$\int_{\Omega} u^2(x,T)\,dx + 2\int_0^T \int_{\Omega} |\nabla u|^2\,dxdt = \int_{\Omega} f^2(x)\,dx, \tag{3.9}$$

para todo $T > 0$. Las identidades (3.9) y (3.8) se conocen como la identidad de energía para la ecuación del calor.

Demostración. Se integra sobre $\Omega \times (0,T)$ la identidad

$$0 = u\left(\partial_t u - \triangle u\right) = \tfrac{1}{2}\partial_t u^2 + |\nabla u|^2 - \nabla \cdot \left(u \nabla u\right).$$

y se aplica el teorema de la divergencia para concluir que

$$\int_\Omega \nabla \cdot (u\nabla u)\; dx = \int_{\partial\Omega} u \tfrac{\partial u}{\partial \nu}\, d\sigma = 0$$

y

$$\partial_T \left[\int_\Omega u^2(x,T)\, dx + 2\int_0^T \int_\Omega |\nabla u(x,t)|^2\, dxdt \right] = 0, \text{ para todo } T > 0.$$

□

La acotación análoga asociada a la solución del problema no homogéneo

$$\begin{cases} \partial_t u - \triangle u = F, & \text{en } \Omega \times (0,+\infty), \\ u(x,0) = f(x) & \text{en } \Omega, \\ u = 0, & \text{en } \partial\Omega \times (0,T), \end{cases} \tag{3.10}$$

es la siguiente: si $u \in C^2(\overline{\Omega} \times [0,+\infty))$ verifica (3.10), $T > 0$ y Ω es acotado, entonces

$$\sup_{0 \le t \le T} \|u(t)\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega\times(0,T))} \le 4\sqrt{\tfrac{2}{3}} \|F\|_{L^1((0,T),L^2(\Omega))}. \tag{3.11}$$

Demostración. Se integra sobre $\Omega \times (0,T)$ la identidad

$$uF = u\left(\partial_t u - \triangle u\right) = \tfrac{1}{2}\partial_t u^2 + |\nabla u|^2 - \nabla \cdot \left(u \nabla u\right).$$

y se aplica el teorema de la divergencia para concluir que

$$\int_\Omega u^2(x,T)\, dx + 2\int_0^T \int_\Omega |\nabla u(x,t)|^2\, dxdt = \int_0^T \int_\Omega u(t)F(t)\, dxdt$$

y

$$\sup_{0 \le t \le T} \|u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega\times(0,T))} \le \int_0^T \int_\Omega |u(t)F(t)|\, dxdt, \text{ si } T > 0. \tag{3.12}$$

Por las desigualdades de Hölder y Young,

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_\Omega |u(t)F(t)|\, dxdt &\le \int_0^T \|u(t)\|_{L^2(\Omega)} \|F(t)\|_{L^2(\Omega)}\, dt \\ &\le \sup_{0\le t\le T} \|u(t)\|_{L^2(\Omega)} \|F\|_{L^1((0,T),L^2(\Omega))} \\ &\le \frac{1}{4} \sup_{0\le t\le T} \|u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + 4\|F\|^2_{L^1((0,T),L^2(\Omega))}, \end{aligned}$$

y (3.11) es consecuencia de (3.12) y de la última desigualdad. □

3.4. La unicidad

• La función
$$\partial_x G(x,t) = -\frac{x}{2\sqrt{4\pi t^3}} e^{-x^2/4t}$$
cumple la ecuación del calor en $t > 0$ y $\lim_{t\to 0+} \partial_x G(x,t) = 0$, para todo x. Si entendemos la condición inicial en este sentido, tenemos una solución no nula del problema (3.2) y con f nula. Por tanto, no habría unicidad. Ahora bien, si entendemos la condición inicial como un límite en las dos variables, esta solución ya no valdría, pues al acercarnos al $(0,0)$ a lo largo de la parábola $x^2 = t$, el límite es infinito.

• *Ejemplo de Tychonoff.* La función

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} g^{(k)}(t) \frac{x^{2k}}{(2k)!} \quad , \quad g(t) = e^{-1/t^2},\ g(0) = 0, \tag{3.13}$$

verifica la ecuación del calor en $\mathbb{R}^2$, $u \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ y $u(\,\cdot\,,0) \equiv 0$. Además, existe $N \geq 1$ tal que

$$|u(x,t)| \leq N e^{\frac{Nx^2}{t} - \frac{1}{Nt^2}},\ \text{si } x \in \mathbb{R} \text{ y } t > 0; \tag{3.14}$$

es decir, u crece “demasiado” en el infinito en cada tiempo fijo, $t > 0$.

Demostración. Con la fórmula de representación de Cauchy para las derivadas de una función analítica mostraremos que existe $N \geq 1$ tal que

$$|g^{(k)}(t)| \leq N^{1+k} k! t^{-k} e^{-\frac{1}{Nt^2}},\ \text{si } t > 0 \text{ y } k \geq 0. \tag{3.15}$$

Esta acotación y la fórmula de Stirling,

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{k!}{\sqrt{2\pi k}\left(\frac{k}{e}\right)^k} = 1,$$

implican que el término general de la serie (3.13) verifica

$$\left| g^{(k)}(t) \frac{x^{2k}}{(2k)!} \right| \leq \frac{N}{k!} \left(\frac{Nx^2}{t} \right)^k e^{-\frac{1}{Nt^2}},\ \text{si } x \in \mathbb{R},\ t > 0 \text{ y } k \geq 0,$$

que la serie (3.13) converge uniformemente sobre compactos de $\mathbb{R} \times (0, +\infty)$, que su suma u verifica (3.14), es continua en $\mathbb{R}^2$ y $u(\,\cdot\,,0) \equiv 0$. Lo mismo es cierto para cualquier derivada de u.

Para ver que (3.15) es cierto, dado $t > 0$ y ϵ en $(0,1)$,

$$g^{(k)}(t) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{|z-t|=\epsilon t} \frac{e^{-1/z^2}}{(z-t)^{k+1}}\, dz,$$

por la fórmula de Cauchy y elegimos $\epsilon > 0$ pequeño de forma que $B_{\epsilon t}(t)$ esté inscrito en un cono con vértice en $(0,0)$ y con ángulo medio de apertura igual a $\pi/8$. Entonces, existe $N \geq 1$ tal que si $z = re^{i\theta}$, se verifica

$$\Re\, 1/z^2 = r^{-2}\cos 2\theta \geq \frac{1}{Nt^2}, \text{ si } |z-t| = \epsilon t,\ t > 0$$

y

$$|g^{(k)}(t)| \leq \frac{k!}{2\pi}\int_{|z-t|=\epsilon t} \frac{e^{-\frac{1}{Nt^2}}}{(\epsilon t)^{k+1}}\,|dz| \leq N^{1+k}k!t^{-k}e^{-\frac{1}{Nt^2}}.$$

$\square$

De lo anterior concluimos que la ecuación del calor en $\mathbb{R}\times(0,+\infty)$ no tiene solución única sin exigir condiciones adicionales a la solución.

En los resultados siguientes veremos algunas condiciones adicionales que garantizan la unicidad de solución para el problemas de valores iniciales sobre un intervalo de $\mathbb{R}$, un dominio acotado de $\mathbb{R}^n$, la recta real $\mathbb{R}$ y el espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$.

Teorema 5 (Principio del máximo débil)**.** *Sean $\Omega_T = (a,b)\times(0,T]$ y $\Gamma_T = [a,b]\times\{0\}\cup\{a,b\}\times(0,T]$, la frontera parabólica del cilindro Ω_T y $0 < T < +\infty$. Si $u \in C(\overline{\Omega_T})\cap C^2(\Omega_T)$ y $\partial_{xx}u - \partial_t u \geq 0$ en Ω_T, entonces*

$$\max_{\Omega_T} u \leq \max_{\Gamma_T} u.$$

Análogamente hay un *principio del mínimo débil*: aplicar el Teorema 5 a $-u$, si $\partial_{xx}u - \partial_t u \leq 0$ en Ω_T y concluir que

$$\min_{\Omega_T} u \geq \min_{\Gamma_T} u.$$

Demostración. Suponemos primero que $u_{xx} - u_t > 0$ en Ω_T. Si u tiene un máximo local en algún (x_0,t_0) que es interior a Ω_T, se verifica que $u_t(x_0,t_0) = 0$ y $u_{xx}(x_0,t_0) \leq 0$. Si hubiera un máximo local en (x_0,T), para algún $a < x_0 < b$, se tendría que, $u_t(x_0,T) \geq 0$ y $u_{xx}(x_0,T) \leq 0$ y ambos casos son incompatibles con la hipótesis, $u_{xx} - u_t > 0$ en Ω_T.

Si $u_{xx} - u_t \geq 0$ en Ω_T, definimos $u_\epsilon(x,t) = u(x,t) + \epsilon x^2$ y por el resultado anterior

$$\max_{\Omega_T} u \leq \max_{\Omega_T} u_\epsilon \leq \max_{\Gamma_T} u_\epsilon \leq \max_{\Gamma_T} u + \epsilon \max\{a^2, b^2\},$$

lo que implica el resultado si hacemos ϵ tender a 0. $\square$

• Lo mismo es cierto en $\mathbb{R}^n$ si $\Omega_T = \Omega\times(0,T]$, $\Gamma_T = \Omega\times\{0\}\cup\partial\Omega\times(0,T]$, $\triangle u - \partial_t u \geq 0$ en Ω_T, Ω es un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$ y $n \geq 2$. En este caso, en un posible máximo interior (x_0,t_0) a Ω_T, la matriz Hessiana de u en (x_0,t_0) es semidefinida negativa y su traza, $\triangle u(x_0,t_0)$, es menor o igual que cero.

• *Consecuencia*: unicidad de solución al problema de valores iniciales asociado a la ecuación del calor con condiciones de Dirichlet en la frontera lateral cuando la base es un intervalo o un abierto acotado en $\mathbb{R}^n$ y para soluciones en $C^2(\Omega \times (0,T]) \cap C(\overline{\Omega}_T)$: para verificarlo aplicar el principio del máximo débil a $\pm(u_1 - u_2)$ en Ω_T, si u_1 y u_2 son soluciones en $C^2(\Omega \times (0,T]) \cap C(\overline{\Omega}_T)$ de

$$\begin{cases} \triangle u - \partial_t u = F, \text{ en } \Omega \times (0,T], \\ u(x,0) = f(x), \text{ en } \Omega, \\ u = 0 \text{ en } \partial\Omega \times (0,T], \end{cases}$$

para concluir que $u_1 = u_2$ en $\Omega \times [0,T]$.

Teorema 6 (Principio del máximo débil para $\mathbb{R}$)**.** *Sea $u \in C(\mathbb{R} \times [0,T]) \cap C^2(\mathbb{R} \times (0,T])$ y tal que $\partial_{xx}u - \partial_t u \geq 0$ en $\mathbb{R} \times (0,T]$, $u(x,t) \leq M$ en $\mathbb{R} \times [0,T]$, para algún $M \geq 0$ y $u(x,0) = f(x)$ en $\mathbb{R}$. Entonces*

$$u(x,t) \leq \sup_{\mathbb{R}} f, \text{ si } x \in \mathbb{R} \text{ y } 0 \leq t \leq T.$$

Demostración. Fijado $y \in \mathbb{R}$ y $0 < \mu \leq 1$, consideramos la función

$$v_\mu(x,t) = u(x,t) - \mu\left(|x-y|^2 + 2t\right).$$

Se verifica que, $\partial_{xx}v_\mu - \partial_t v_\mu \geq 0$ en $\mathbb{R} \times (0,T]$ y por el principio del máximo débil para cilindros acotados

$$v_\mu(y,t) \leq \max_{\Gamma_\rho} v_\mu, \text{ si } \Gamma_\rho = [y-\rho, y+\rho] \times \{0\} \cup \{y-\rho, y+\rho\} \times [0,T]$$

y $0 \leq t \leq T$. En la parte lateral de Γ_ρ

$$|x-y|^2 + 2t \geq \rho^2 \quad \text{y} \quad v_\mu(x,t) \leq M - \mu\rho^2 \leq \sup_{\mathbb{R}} f,$$

si $\rho \geq \rho(M, \sup_{\mathbb{R}} f, \mu)$. Por tanto,

$$v_\mu(y,t) = u(y,t) - 2\mu t \leq \sup_{\mathbb{R}} f, \text{ si } 0 \leq t \leq T$$

y haciendo, $\mu \to 0^+$, obtenemos el resultado. □

Lo mismo funciona en $\mathbb{R}^n \times (0,T]$ si cambiamos v_μ por

$$v_\mu(x,t) = u(x,t) - \mu\left(|x-y|^2 + 2nt\right).$$

• *Consecuencia*: unicidad de solución para el problema de condiciones iniciales asociado a la ecuación del calor en $\mathbb{R} \times (0,+\infty)$ en la clase de soluciones $C^2(\mathbb{R} \times (0,+\infty)) \cap C(\mathbb{R} \times [0,+\infty)) \cap L^\infty(\mathbb{R} \times [0,+\infty))$. Si $f \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$, la solución de (3.2) generada con el núcleo de Gauss está en $C^2(\mathbb{R} \times (0,+\infty)) \cap C(\mathbb{R} \times [0,+\infty)) \cap L^\infty(\mathbb{R} \times [0,+\infty))$ y es única.

• La conclusión del Teorema 6 también es válida si la condición, $u(x,t) \leq M$, se cambia por, $u(x,t) \leq Me^{M|x|^2}$ en $\mathbb{R} \times [0,T]$, para algún $M > 0$ (Comparar esto con las soluciones de Tychonoff).

3.5. Ecuación no homogénea: método de Duhamel

Buscamos una solución para el problema no homogéneo

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = F(x,t), & x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ u(x,0) = 0, & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{3.16}$$

La ecuación diferencial ordinaria no homogénea con condición inicial

$$\begin{cases} y' + ay = F(t), \\ y(0) = 0, \end{cases}$$

se resuelve por el método de variación de las constantes, que es equivalente al método de Duhamel que describimos a continuación: la solución $y(t)$ se puede escribir como

$$y(t) = \int_0^t \gamma(t,s)\, ds.$$

Entonces,

$$y'(t) = \gamma(t,t) + \int_0^t \gamma_t(t,s)\, ds, \quad y' + ay = \gamma(t,t) + \int_0^t \gamma_t(t,s) + a\gamma(t,s)\, ds$$

y si queremos que y sea solucion, esto se cumplirá si elegimos γ de forma que

$$\begin{cases} \gamma_t(t,s) + a\gamma(t,s) = 0, \text{ en } (s,+\infty) \\ \gamma(s,s) = F(s), \text{ en } t = s, \end{cases}$$

que es un problema homogéneo que sabemos resolver. Si $w(t,s)$ es la solución de la ecuación homogénea

$$\begin{cases} w_t(t,s) + aw(t,s) = 0, \text{ en } (0,+\infty) \\ w(0,s) = F(s), \text{ en } t = 0, \end{cases}$$

$w(t,s) = e^{-at}F(s)$ y $\gamma(t,s) = w(t-s,s)$; es decir.

$$y(t) = \int_0^t w(t-s,s)\, ds.$$

Para resolver (3.16), procedemos de forma similar

Teorema 7. *Si $w(\cdot,\cdot,s)$ es la solución de*

$$\begin{cases} w_t - \partial_x^2 w = 0, & x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ w(x,0,s) = F(x,s), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

entonces

$$u(x,t) = \int_0^t w(x,t-s,s)\, ds = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} G(x-y,t-s)F(y,s)\, dyds \tag{3.17}$$

es solución de (3.16).

Demostración. Para deducir tal fórmula, escribimos

$$u(x,t) = \int_0^t \gamma(x,t,s)\,ds$$

y un cálculo formal muestra que

$$\partial_t u - \partial_x^2 u = \gamma(x,t,t) + \int_0^t \left(\partial_t - \partial_x^2\right)\gamma(x,t,s)\,ds.$$

Lo lógico es elegir γ de forma que

$$\begin{cases} \left(\partial_t - \partial_x^2\right)\gamma(x,t,s) = 0, & \text{en } \mathbb{R}\times(s,+\infty), \\ \gamma(x,s,s) = F(x,s), & \text{en } \mathbb{R}\times\{s\} \end{cases}$$

y como la ecuación es invariante por traslaciones,

$$\gamma(x,t,s) = w(x,t-s,s).$$

Finalmente,

$$w(x,t,s) = \int_{\mathbb{R}} G(x-y,t)F(y,s)\,dy.$$

□

El *principio de Duhamel* se puede aplicar también a la ecuación de ondas no homogénea.

Teorema 8. *Sea* $w(\,\cdot\,,\,\cdot\,,s)$ *la solución de*

$$\begin{cases} \partial_t^2 w - c^2\partial_x^2 w = 0, & x\in\mathbb{R},\ t>0, \\ w(x,0;s) = 0, & x\in\mathbb{R}; \\ \partial_t w(x,0;s) = F(x,s), & x\in\mathbb{R}, \end{cases}$$

entonces

$$u(x,t) = \int_0^t w(x,t-s,s)\,ds \tag{3.18}$$

es solución de la ecuación de ondas

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - c^2\partial_x^2 u = F(x,t), & x\in\mathbb{R},\ t>0, \\ u(x,0) = 0, & x\in\mathbb{R}, \\ u_t(x,0) = 0, & x\in\mathbb{R}. \end{cases} \tag{3.19}$$

Podéis comprobar que esto coincide con los resultados obtenidos anteriormente para esta ecuación.

Demostración. El lector puede comprobrar que (3.18) es formalmente una solución de (3.19). Para deducir la fórmula, escribimos

$$u(x,t) = \int_0^t \gamma(x,t,s)\, ds$$

y un cálculo formal muestra que

$$\partial_t^2 u - c^2 \partial_x^2 u = \partial_t \gamma(x,t,t) + \int_0^t \left(\partial_t^2 - c^2 \partial_x^2\right) \gamma(x,t,s)\, ds,$$

si suponemos que $\gamma(x,t,t) = 0$. Lo lógico es elegir γ de forma que

$$\begin{cases} \left(\partial_t^2 - c^2 \partial_x^2\right) \gamma(x,t,s) = 0, & \text{en } \mathbb{R} \times (s, +\infty), \\ \gamma(x,s,s) = 0,\ \partial_t \gamma(x,s,s) = F(x,s), & \text{en } \mathbb{R} \times \{s\} \end{cases}$$

y como la ecuación es invariante por traslaciones,

$$\gamma(x,t,s) = w(x, t-s, s).$$

□

3.6. La ecuación del calor en un cilindro

• La solución del problema

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = F(x,t), & \text{en } \mathbb{R} \times (0, +\infty), \\ u(x,0) = f(x), & \text{en } \mathbb{R}, \end{cases}$$

es par o impar respecto a $x = l$ en todo tiempo $t > 0$, si la misma propiedad es cierta para f y $F(\,\cdot\,, t)$, para todo $t > 0$. Por ello, podemos utilizar el método de reflexiones para encontrar la solución del problema

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = F(x,t), & x > 0,\ t > 0, \\ u(x,0) = f(x), & x > 0, \\ u(0,t) = 0, & t > 0, \end{cases}$$

resolviendo un problema en todo $\mathbb{R}$, que tiene por datos las extensiones impares a $\mathbb{R}$ de f y $F(\,\cdot\,, t)$. Si $F \equiv 0$, la solución es

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_0^\infty f(y) \left[e^{-(x-y)^2/4t} - e^{-(x+y)^2/4t} \right] dy.$$

• Si la condición de contorno es de tipo Neumann, $u_x(0,t) = 0$, la extensión debe ser par.

• El método de reflexiones también funciona para la ecuación del calor con condiciones de Dirichlet, Neumann o con condiciones mixtas sobre un intervalo finito. Para ello, se calculan las correspondientes extensiones de f y $F(\,\cdot\,,t)$ a todo $\mathbb{R}$ como funciones pares o impares respecto a los extremos del intervalo, se resuelve el problema asociado a las extensiones de f y $F(\,\cdot\,,t)$ sobre $\mathbb{R}$ y se restringe la solución calculada al cilindro asociado al intervalo.

• El método de Duhamel funciona de forma análoga en un cilindro de base finita o de media recta.

Capítulo 4

Separación de variables

4.1. Calor en una barra finita: método de Fourier

- Consideramos el problema

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0\,, & 0 < x < \pi\,, t > 0\,, \\ u(x,0) = f(x)\,, & 0 < x < \pi\,, \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0\,, & t > 0\,. \end{cases} \tag{4.1}$$

El método de Fourier (*separación de variables*) consiste en buscar soluciones no nulas en variables separadas de la ecuación, $u(x,t) = X(x)T(t)$, que cumplan las condiciones de contorno *laterales*. Después se intenta que una "combinación lineal"o suma infinita de éstas verifique la condición inicial y sea la solución de la ecuación.

Si $u(x,t) = X(x)T(t)$ es una solución no nula en $[0,\pi]$ de $u_t - u_{xx} = 0$, se debe cumplir que, $X(x)T'(t) - X''(x)T(t) = 0$; es decir,

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{T(t)}\ ,$$

son funciones constantes y podemos suponer que para algún $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{T(t)} = -\lambda.$$

Las condiciones de contorno exigen que $X(0) = X(\pi) = 0$, de modo que necesitamos encontrar las soluciones no nulas del problema (llamado de Sturm-Liouville)

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \text{ en } [0,\pi], \\ X(0) = X(\pi) = 0. \end{cases} \tag{4.2}$$

Es fácil comprobar que (4.2) tiene soluciones no nulas si y sólo si, $\lambda = k^2$ (*valores propios*), $k = 1, 2, \dots$ y que éstas soluciones son múltiplos de $\sin kx$

(*funciones propias*). Para estos valores de λ, las correspondientes soluciones no nulas de la ecuación,

$$T' + \lambda T = 0,$$

son múltiplos de $e^{-k^2 t}$ y las soluciones de variables separadas de (4.1), son

$$u_k(x,t) = e^{-k^2 t} \sin(kx), \text{ si } k \geq 1.$$

Para resolver (4.1) y suponiendo que no hubiera problemas para la convergencia y la conmutación de las derivadas con la suma infinita, la ecuación y las condiciones de contorno se cumplen si tomamos por solución de (4.1), la suma infinita

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k e^{-k^2 t} \sin kx. \tag{4.3}$$

Para la condición inicial necesitaríamos (formalmente) que

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx = f(x) \tag{4.4}$$

y la cuestión que surge es si existen coeficientes b_k que hagan posible la identidad.

• Una familia ortogonal de funciones $\{\varphi_k : k \geq 1\}$ es completa en $L^2(a,b)$ si para toda f en $L^2(a,b)$ existen números $\{\alpha_k\}$ tales que,

$$\|f - \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \varphi_k\|_{L^2(a,b)}$$

tiende a cero, si $N \to +\infty$. En tal caso,

$$\begin{aligned}\int_a^b f\varphi_l = \int_a^b (f - T_N f)\,\varphi_l\,dx + \int_a^b T_N f \varphi_l\,dx \\ = \int_a^b (f - T_N f)\,\varphi_l\,dx + \alpha_l \int_a^b \varphi_l^2,\end{aligned}$$

si $N \geq l \geq 1$ y $T_N f = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \varphi_k$. Por la desigualdad de Hölder

$$\left| \int_a^b (f - T_N f)\,\varphi_l\,dx \right| \leq \|f - T_N f\|_{L^2(a,b)} \|\varphi_l\|_{L^2(a,b)}$$

que tiende a cero si N crece. Es decir,

$$\alpha_l = \int_a^b f\varphi_l\,dx \Big/ \int_a^b \varphi_l^2\,dx, \text{ si } l \geq 1. \tag{4.5}$$

Si $\{\varphi_k\}$ es completa, la serie $\sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k\varphi_k$ se denomina *serie de Fourier* de f en la base $\{\varphi_k\}$. La ortogonalidad de $\{\varphi_k\}$ y (4.5) implican la *desigualdad de Bessel* para $\{\varphi_k\}$

$$\|f - \sum_{k=1}^{N} \alpha_k\varphi_k\|^2_{L^2(a,b)} = \|f\|^2_{L^2(a,b)} - \sum_{k=1}^{N} \alpha_k^2 \int_a^b \varphi_k^2\, dx \geq 0, \text{ si } N \geq 1 \quad (4.6)$$

y pasando al límite

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k^2 \int_a^b \varphi_k^2\, dx \leq \|f\|^2_{L^2(a,b)}.$$

La completitud de $\{\varphi_k\}$ y (4.6) dan la *identidad de Parseval o de Plancherel* para $\{\varphi_k\}$,

$$\|f\|^2_{L^2(a,b)} = \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k^2 \int_a^b \varphi_k^2\, dx, \text{ si } f \in L^2(a,b).$$

4.2. Criterio de Weierstrass

Teorema 9 (Criterio de Weierstrass)**.** *Si $\{f_k\}$ es una sucesión de funciones, $f_k : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, Ω es una abierto en $\mathbb{R}^n$ y para cada $K \subset \Omega$ compacto de Ω existe una sucesión $\{M_k\}$ de números positivos tales que*

$$|f_k| \leq M_k \text{ en } K \quad y \quad \sum_{k=1}^{+\infty} M_k < +\infty.$$

Entonces, la serie de funciones, $\sum_{k=0}^{+\infty} f_k$, converge uniformemente sobre compactos de Ω. Además, si $f_k \in C(\Omega)$, para todo $k \geq 1$, entonces $f \in C(\Omega)$.

Demostración. Si $S_N(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} f_k(x)$ y $1 \leq N < M$,

$$|S_N(x) - S_M(x)| \leq \sum_{k=N+1}^{M} M_k, \text{ si } x \in K,$$

suma que será más pequeña que $\epsilon > 0$, si $N \geq N_\epsilon$. Es decir, $\{S_N\}$ es una sucesión de Cauchy en $L^\infty(K)$ y la serie converge uniformemente sobre K. La suma de la serie será continua en Ω, por ser límite uniforme de funciones continuas sobre compactos de Ω, si cada $f_k \in C(\Omega)$. □

Teorema 10 (Derivabilidad de una serie de funciones)**.** *Si además, $f_k \in C^1(\Omega)$, para todo $k \geq 1$ y para cada $K \subset \Omega$ compacto existe una sucesión N_k, tal que*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} N_k < \infty \quad y \quad \left|\frac{\partial f_k}{\partial x_i}\right| \leq N_k \text{ en } K,$$

para cada $i = 1, \cdots, n$ *y* $k \geq 1$. *Entonces,* $f \in C^1(\Omega)$ *y*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\partial f_k}{\partial x_i}, \quad \textit{para } i = 1, \ldots, n.$$

La demostración la podéis encontrar en el libro J.E. Marsden y M. J. Hoffman, *Análisis Clásico Elemental.*

4.3. Series de Fourier

Serie trigonométrica de periodo 2π

• Es toda serie de la forma

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

• Al haber un paso al límite, que es *la suma de la serie*, esta puede entenderse de distintas formas: *convergencia puntual, uniforme, en normas variadas...*

Coeficientes de Fourier

• De la ortogonalidad de la familia $\{1, \cos kx, \sin kx\}$ en $[-\pi, \pi]$, si f coincide con la suma de su serie de Fourier y la serie converge uniformemente (o en $L^2(-\pi, \pi)$) a f, se obtiene que

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx \text{ y } b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx, \text{ si } k \geq 0$$

y se denominan los *coeficientes de Fourier* de f en $[-\pi, \pi]$. Estos tienen sentido y se pueden calcular si f está en $L^1(-\pi, \pi)$.

• La serie trigonométrica construida con estos coeficientes se llama la *serie de Fourier* de f.

• Las propiedades elementales de los coeficientes de Fourier son

- Linealidad: $a_k(f + g) = a_k(f) + a_k(g)$, $b_k(f + g) = b_k(f) + b_k(g)$.
- Acotación: $|a_k|, |b_k| \leq \|f\|_1/\pi$, si $k \geq 0$.
- *Lema de Riemann Lebesgue*: Si $f \in L^1(-\pi, \pi)$, entonces

$$\lim_{k \to \infty} a_k = \lim_{k \to \infty} b_k = 0.$$

Demostración. Si $f = \chi_{[a,b]}$, $[a,b] \subset [-\pi,\pi]$,

$$a_k(f) = \frac{1}{\pi}\int_a^b \cos kx\, dx = \frac{\sin kb - \sin ka}{k}\ ,$$

que tiende a cero, si $k \to +\infty$. Si $f \in C([-\pi,\pi])$, para cada $\epsilon > 0$ existe una partición, $-\pi = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = \pi$, de forma que la función escalonada, $S = \sum_{i=0}^{N-1} f(x_i)\chi_{[x_i,x_{i+1})}$ verifica, $\|f - S\|_{L^\infty(-\pi,\pi)} \leq \frac{\epsilon}{2}$ y

$$|a_k(f)| \leq |a_k(f-S)| + |a_k(S)| \leq \epsilon + |a_k(S)|,\ \text{para todo } k \geq 1.$$

Como $\lim_{k\to+\infty} a_k(S) = 0$, podremos encontrar k_ϵ tal que $|a_k(f)| \leq 2\epsilon$, si $k \geq k_\epsilon$. En general, si $f \in L^1(-\pi,\pi)$, existe $g \in C([-\pi,\pi])$, tal que $\|f-g\|_{L^1(-\pi,\pi)} \leq \pi\epsilon$ y

$$|a_k(f)| \leq |a_k(f-g)| + |a_k(g)| \leq \epsilon + |a_k(g)|,\ \text{para todo } k \geq 1.$$

Como $\lim_{k\to+\infty} a_k(g) = 0$, podremos encontrar k_ϵ tal que, $|a_k(f)| \leq 2\epsilon$, si $k \geq k_\epsilon$. □

• Si $f \in C^1([-\pi,\pi])$ y $f(\pi) = f(-\pi)$, la relación entre los coeficientes de Fourier de f y f' es la siguiente:

$$a_k(f') = k b_k(f)\ ,\ b_k(f') = -k a_k(f),\ \text{si } k = 1, 2, 3\ldots$$

• Si $f \in C^\infty([-\pi,\pi])$ y sus derivadas son periódicas de periodo 2π, los coeficientes de Fourier de f verifican

$$|a_k(f)| + |b_k(f)| \leq \frac{2}{k^N}\,\|f^{(N)}\|_{L^1(-\pi,\pi)},\ \text{para todo } k \geq 0 \text{ y } N \geq 1.$$

Demostración. Integrar por partes. □

Núcleo de Dirichlet

• Si $S_N(f)(x)$ es la N-ésima suma parcial de la serie de Fourier de una función f en $L^1(-\pi,\pi)$,

$$S_N(f)(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^N \cos kx\cos kt + \sin kx \sin kt\right] dt$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^N \cos k(x-t)\right] dt.$$

La fórmula, $2\cos x \sin y = \sin(x+y) - \sin(x-y)$, muestra que

$$2\left\{\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^N \cos ky\right\}\sin\left(\frac{y}{2}\right)$$
$$= \sin\left(\frac{y}{2}\right) + \sum_{k=1}^N\left[\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)y - \sin\left(k-\frac{1}{2}\right)y\right] = \sin\left(N+\frac{1}{2}\right)y$$

y

$$S_N(f)(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_N(x-t)\,dt, \text{ donde } D_N(x) = \frac{\sin(N+1/2)x}{2\sin(x/2)}.$$

La función D_N se denomina *núcleo de Dirichlet.* Es una función regular y periódica de periodo 2π.

• Extendiendo f a todo $\mathbb{R}$ como una función periódica de periodo 2π y haciendo el cambio de variables natural, podemos escribir

$$S_N(f)(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)D_N(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)D_N(t)\,dt. \tag{4.7}$$

• Como $S_N(1) \equiv 1$, (4.7) implica que

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_N(t)\,dt = 1. \tag{4.8}$$

Resultados de convergencia

A partir del lema de Riemann-Lebesgue y de la representación (4.7) con el núcleo de Dirichlet podemos probar el siguiente resultado de convergencia puntual de la serie de Fouriter:

Teorema 11. *Si $f : [-\pi,\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ verifica, $f(\pi) = f(-\pi)$ y para algún $\alpha > 0$ y $M > 0$,*

$$|f(x) - f(y)| \le M|x-y|^\alpha, \text{ si } x \text{ e } y \in [-\pi,\pi]. \tag{4.9}$$

Entonces, $\lim_{N\to\infty} S_N(f)(x) = f(x)$ *en* $[-\pi,\pi]$.

Demostración. La extensión periódica de f a todo $\mathbb{R}$ verifica (4.9) y por (4.8), podemos escribir

$$\begin{aligned} S_N(f)(x) - f(x) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [f(x-t) - f(x)]\,D_N(t)\,dt \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x-t)-f(x)}{2\sin(\frac{t}{2})}\sin(N+\tfrac{1}{2})t\,dt = b_{N+\frac{1}{2}}(g_x), \end{aligned}$$

si

$$g_x(t) = \frac{f(x-t)-f(x)}{2\sin(\frac{t}{2})}.$$

La condición de regularidad (4.9) muestra que $g_x \in L^1(-\pi,\pi)$,

$$|g_x(t)| \le \frac{M|t|^\alpha}{|\sin(\frac{t}{2})|} \lesssim |t|^{\alpha-1}, \text{ si } |t| \le \pi$$

y por el Lema de Riemann-Lebesgue,

$$\lim_{N\to+\infty} b_{N+\frac{1}{2}}(g_x) = 0.$$

□

Desigualdad de Bessel

Teorema 12. *Si* $f \in L^2(-\pi, \pi)$*, entonces*

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, dx. \tag{4.10}$$

Demostración. La familia de funciones $\{1, \cos kx, \sin kx\}$ es ortogonal en $L^2(-\pi, \pi)$,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 kx \, dx = \pi, \text{ si } k \geq 1$$

y la *desigualdad de Bessel* asociada es (4.10). □

Un resultado de convergencia uniforme

Sabemos que si una sucesión de funciones continuas converge uniformemente, el límite es una función continua y por tanto, si una serie de Fourier converge uniformemente, su suma es una función continua.

Teorema 13. *Sea* $f \in C^1([-\pi, \pi])$ *o* C^1 *a trozos y tal que* $f(\pi) = f(-\pi)$*. Entonces, su serie de Fourier converge uniformemente a* f *en* $[-\pi, \pi]$*.*

Demostración. Una tal f verifica las condiciones del teorema 11 con $\alpha = 1$ y $M = \|f'\|_{L^\infty(-\pi,\pi)}$, y su serie de Fourier converge puntualmente a f en $[-\pi, \pi]$. Al mismo tiempo,

$$|a_k| + |b_k| \leq k^{-2} + k^2 \left(a_k^2 + b_k^2\right), \text{ si } k \geq 1. \tag{4.11}$$

La relación entre los coeficientes de Fourier de f y los de su derivada, la desigualdad de Bessel y (4.11) implican que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k^2 \left(a_k^2 + b_k^2\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k(f')^2 + b_k(f')^2 \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'^2(x) \, dx$$

y la convergencia uniforme de la serie de Fourier se sigue del criterio de Weierstrass y de la desigualdad

$$|a_x \cos kx + b_k \sin kx| \leq |a_k| + |b_k|, \text{ si } k \geq 1.$$

□

Una vez conocido este resultado, podemos demostrar la *identidad de Parseval* para $\{1, \cos kx, \sin kx\}$ con un argumento de densidad y deducir que dicha familia forma un sistema completo en $L^2(-\pi, \pi)$.

Teorema 14. *La serie de Fourier de una función* $f \in L^2(-\pi, \pi)$ *converge a* f *en* $L^2(-\pi, \pi)$ *y la desigualdad de Bessel es una identidad.*

Demostración. La desigualdad de Bessel es equivalente a que

$$\|S_N(f)\|_{L^2(-\pi,\pi)} = \sqrt{\pi}\left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{N}(a_k^2 + b_k^2)\right)^{\frac{1}{2}} \le \|f\|_{L^2(-\pi,\pi)}, \tag{4.12}$$

si $N \ge 1$ y $f \in L^2(-\pi,\pi)$, que junto con la desigualdad triangular implica que

$$\|f - S_N(f)\|_{L^2(-\pi,\pi)} \le \|f-\varphi\|_{L^2(-\pi,\pi)} + \|\varphi - S_N(\varphi)\|_{L^2(-\pi,\pi)}$$
$$+\|S_N(\varphi - f)\|_{L^2(-\pi,\pi)} \le \left(1+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)\|f-\varphi\|_{L^2(-\pi,\pi)} + \|\varphi - S_N(\varphi)\|_{L^2(-\pi,\pi)}.$$

En la desigualdad anterior, podemos elegir $\varphi \in C_0^\infty(-\pi,\pi)$ que verifique

$$\|f-\varphi\|_{L^2(-\pi,\pi)} \le \epsilon$$

y como $S_N(\varphi)$ converge uniformemente a φ en $[-\pi,\pi]$,

$$\|\varphi - S_N(\varphi)\|_{L^2(-\pi,\pi)}$$

tiende a cero, si $N \to +\infty$ y concluimos que también $S_N f$ converge a f en $L^2(-\pi,\pi)$. Éste resultado y la identidad

$$\|f - S_N(f)\|^2_{L^2(-\pi,\pi)} = \|f\|^2_{L^2(-\pi,\pi)} - \pi\left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{N} a_k^2 + b_k^2\right),$$

muestran que la desigualdad de Bessel (4.12) es de hecho una identidad, llamada identidad de Plancherel o Parseval,

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty}(a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx, \text{ si } f \in L^2(-\pi,\pi),$$

y por tanto, $\{1, \cos kx, \sin kx\}$ es completa en $L^2(-\pi,\pi)$. □

Funciones pares e impares

• *Series de Fourier de cosenos/senos.* Dada una función en $[0,\pi]$, se llama serie de Fourier de cosenos de f a la serie de Fourier de su extensión par al intervalo $[-\pi,\pi]$. La serie de Fourier de senos de f es la serie de Fourier de su extensión impar a $[-\pi,\pi]$.

• Las funciones $\{\sin kx : k \ge 1\}$ y $\{\cos kx : k \ge 0\}$ forman sistemas completos en $L^2(0,\pi)$ respectivamente.

Demostración. Sea $\widetilde{f}$ la extensión par a $[-\pi,\pi]$ de f en $L^2(0,\pi)$. Los coeficientes de Fourier de $\widetilde{f}$ son respectivamente

$$\widetilde{a}_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\widetilde{f}(x)\cos kx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos kx\,dx, \text{ si } k \geq 0$$

y

$$\widetilde{b}_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\widetilde{f}(x)\sin kx\,dx = 0, \text{ si } k \geq 1.$$

Como

$$\|\widetilde{f} - \left(\frac{\widetilde{a}_0}{2} + \sum_{k=1}^{N}\widetilde{a}_k\cos kx\right)\|_{L^2(-\pi,\pi)}$$

tiende a cero y $[0,\pi] \subset [-\pi,\pi]$, la serie de Fourier de cosenos

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k\cos kx, \quad a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos kx\,dx, \text{ si } k \geq 0$$

converge a f en $L^2(0,\pi)$.

Si $\widetilde{f}$ es la extensión impar de f, su serie de Fourier sólo tiene senos. En este caso

$$b_k = \widetilde{b}_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin kx\,dx, \text{ si } k \geq 1$$

y

$$\|f - \sum_{k=1}^{N} b_k\sin kx\|_{L^2(0,\pi)} \leq \|\widetilde{f} - \sum_{k=1}^{N}\widetilde{b}_k\sin kx\|_{L^2(-\pi,\pi)},$$

que tiende a cero si $N \to +\infty$. □

Cambio de periodo

- Si f es periódica de periodo $2l$, su serie de Fourier en $(-l,l)$ se escribe

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos\left(\frac{k\pi x}{l}\right) + b_k\sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right),$$

con

$$a_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\left(\frac{k\pi x}{l}\right)dx, \quad b_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right)dx$$

y las funciones

$$\{1, \cos\left(\frac{k\pi x}{l}\right), \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right)\}$$

forman un sistema completo en $L^2(-l,l)$.

- Las familias de funciones

$$\{1, \cos\left(\tfrac{k\pi x}{l}\right), \sin\left(\tfrac{k\pi x}{l}\right)\}\ ,\ \{\cos\left(\tfrac{k\pi x}{l}\right) : k \geq 0\}\ ,\ \{\sin\left(\tfrac{k\pi x}{l}\right) : k \geq 1\}$$

son sistemas completos en $L^2(0,l)$, si $l > 0$.

Demostración. El cambio de variable, $g(x) = f(\frac{lx}{\pi})$, transforma $L^2(-l,l)$ en $L^2(-\pi,\pi)$ y la información sobre la serie de Fourier clásica de g en $[-\pi,\pi]$, en información para la nueva serie de Fourier de f en $(-l,l)$. $\square$

4.4. Vuelta al problema del calor en una barra finita

Los coeficientes b_k en (4.4) son los de la serie de Fourier de senos de f en $(0,\pi)$:

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin kx\,dx, \text{ si } k \ge 1.$$

Esta sucesión de números está acotada, si $f \in L^1(0,\pi)$ y la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k e^{-k^2 t}\sin kx,$$

converge uniformemente junto con sus derivadas en $\mathbb{R}\times[\epsilon,+\infty)$ para todo $\epsilon > 0$, es una solución de la ecuación del calor y verifica la condición de contorno en $[0,\pi]\times(0,+\infty)$.

Demostración. Si $\alpha,\beta \in \mathbb{N}$, $k^{\alpha+2\beta}e^{-k^2\epsilon} \le C(\alpha,\beta,\epsilon)$, para todo $k \ge 1$,

$$\begin{aligned}|\partial_x^\alpha\partial_t^\beta\left(b_k e^{-k^2 t}\sin kx\right)| &\lesssim \|f\|_{L^1(0,\pi)}k^{\alpha+2\beta}e^{-k^2 t}\\ &\le C(\alpha,\beta,\epsilon,f)\left(\frac{1}{e^\epsilon}\right)^k, \text{ si } x\in\mathbb{R} \text{ y } t \ge 2\epsilon\end{aligned}$$

y la afirmación es consecuencia del criterio de Weierstrass y de la convergencia de la serie de término general r^k, $0 < r < 1$. $\square$

Convergencia al dato inicial

Teorema 15. *Si $f \in L^2(0,\pi)$, entonces $u(\,\cdot\,,t)$ converge a f en $L^2(0,\pi)$.*

Demostración. Sabemos que $\{\sin kx :\ k \ge 1\}$ es completa en $L^2(0,\pi)$ y por la identidad de Plancherel para esta familia

$$\|u(\cdot,t) - f\|^2_{L^2(0,\pi)} = \|\sum_{k=1}^{+\infty} b_k(e^{-k^2 t}-1)\sin kx\|^2_{L^2(0,\pi)} = \frac{\pi}{2}\sum_k b_k^2(1-e^{-k^2 t})^2$$

y el límite a la derecha es cero por el Teorema de Convergencia Dominada o la siguiente acotación:

$$\sum_k b_k^2(1-e^{-k^2 t})^2 \le \sum_{k=1}^{N_\epsilon} b_k^2(1-e^{-k^2 t})^2 + \epsilon\,,$$

si N_ϵ se elige tal que, $\sum_{k=N_\epsilon+1}^{+\infty} b_k^2 \le \epsilon$. $\square$

Si $f \in C([0,\pi])$, $f(0) = f(\pi) = 0$ y $\widetilde{f}$ es la extensión impar de f a $\mathbb{R}$ respecto de 0 y π, $\widetilde{f} \in C(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$. En tal caso, la solución de (4.1) que obtenemos por el método de reflexiones está en $C^\infty([0,\pi] \times (0,+\infty)) \cap C([0,\pi]\times[0,+\infty))$. También se puede mostrar que la solución generada por el método de separación de variables es, en tal caso, continua en $[0,\pi]\times[0,+\infty)$, y por el principio del máximo débil para un cilindro de base acotada, las dos soluciones son iguales (Ver la sección titulada *Extensión de la validez de esas soluciones* en el libro de Hans F. Weinberger pero no intentar su lectura hasta haber leído el último tema en este curso).

Es fácil mostrar que la solución generada por el método de separación de variables es continua en la clausura del cilindro $[0,\pi] \times \mathbb{R}$, si $f \in C^1([0,\pi])$ y $f(0) = f(\pi) = 0$.

Demostración. Los coeficietes de la serie de Fourier de senos de f verifican

$$b_k = -\frac{2}{\pi k}\int_0^\pi f(x)\,(\cos kx)'\,dx = \frac{2}{\pi k}\int_0^\pi f'(x)\cos kx\,dx = \frac{a_k}{k},\ \text{si } k \geq 1,$$

donde a_k es el coeficiente de Fourier de la serie de cosenos de f' en $[0,\pi]$. Esto implica que

$$|b_k| \leq \frac{1}{k^2} + a_k^2,\ \text{si } k \geq 1, \tag{4.13}$$

y (4.13), la identidad de Plancherel para la serie de cosenos de f' en $[0,\pi]$ y el criterio de Weiestrass, muestran que la serie (4.3) converge uniformemente hacia una función continua en $[0,\pi] \times \mathbb{R}$. □

Otras condiciones de contorno

• Si las condiciones de contorno son, $u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0$ (de tipo Neumann), llegamos a

$$X'' + \lambda X = 0,\ \text{con } X'(0) = X'(\pi) = 0,$$

que tiene soluciones no nulas para $\lambda = 0$ (las constantes) y $\lambda = k^2$ (múltiplos de $\cos kx$), si $k \geq 1$. La solución se escribe como

$$u(x,t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-k^2 t}\cos kx,$$

y los a_k se obtienen como los coeficientes de la serie de cosenos de f.

Métodos similares a los de la sección anterior muestran que si f está en $C^1([0,\pi])$, entonces u está en $C^\infty([0,\pi] \times (0,+\infty))$, que u es continua en $[0,\pi] \times [0,+\infty)$ y que u está en $C^1([0,\pi] \times [0,+\infty))$, si $f \in C^2([0,\pi])$ y $f'(0) = f'(\pi) = 0$.

• Si las condiciones de contorno son, $u(0,t) = 0$ y $u_x(\pi,t) = 0$, estas conducen al problema de Sturm-Liouville

$$X'' + \lambda X = 0, \text{ con } X(0) = X'(\pi) = 0,$$

que tiene como valores propios $\lambda_k = (k+1/2)^2$ y como funciones propias a $X_k = \sin(k+1/2)x$, si $k \geq 0$. Así,

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{-(k+1/2)^2 t} \sin(k+1/2)x$$

y para encontrar la solución por el método de la separación de variables necesitamos saber que

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \sin(k+1/2)x,$$

en algún sentido ¿Es $\{\sin(k+1/2)x : k \geq 0\}$ una familia completa en $L^2(0,\pi)$?

Para resolver este problema procedemos como con el método de reflexiones y de forma análoga a como probamos que las funciones asociadas a las series de cosenos y senos son familias completas en $L^2(0,\pi)$: si $\widetilde{f}$ denota la extensión de f a toda la recta real como función impar respecto a $x = 0$ y par respecto a $x = \pi$, $\widetilde{f}(2x)$ es periódica de periodo 2π y su serie de Fourier, se reduce a una serie de senos impares. Como $f(x) = \widetilde{f}(\frac{x}{2})$, resulta que f admite un desarrollo con una serie de Fourier del tipo anterior con

$$c_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(k+1/2)x \, dx$$

que convege a f en $L^2(0,\pi)$.

4.5. Ecuación no homogénea

El método de separación de variables requiere condiciones de contorno homogéneas. Si no lo son, podemos escoger una función v que cumpla las condiciones de contorno del problema, restarla de u y resolver un nuevo problema para $w = u - v$. Esto puede afectar al segundo miembro de la ecuación y a la condición inicial.

4.5.1. Segundo miembro no nulo

Consideramos ahora el problema no homogéneo

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = F(x,t)\,, & 0 < x < \pi\,, t > 0\,, \\ u(x,0) = 0\,, & 0 < x < \pi\,, \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0\,, & t > 0\,. \end{cases}$$

que también se puede resolver por separación de variables: imitamos el método de variación de las constantes (o de Duhamel) y se escribe u como una serie de funciones de variables separadas con nuevas funciones de la variable temporal t que multiplican a las soluciones del problema de Sturm-Liouville asociado al problema homogéneo; es decir, escribimos

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \sin kx,$$

y se requiere que u cumpla la ecuación y la condición inicial (el método asegura las condiciones de contorno). Desarrollando F según las mismas funciones propias, podremos escribir

$$F(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k(t) \sin kx$$

y las funciones $T_k(t)$ se determinan como las soluciones de la ecuación diferencial ordinaria

$$\begin{cases} T_k'(t) + k^2 T_k(t) = C_k(t), \\ T_k(0) = 0, \end{cases}$$

que resolvemos por el método de variación de las constantes.

4.6. Separación de variables para la ecuación de ondas

Sea el problema de ondas en una cuerda finita

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0\,, & 0 < x < \pi\,, t > 0\,, \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0\,, & t > 0\,, \\ u(x,0) = f(x)\,, & 0 < x < \pi\,, \\ u_t(x,0) = g(x)\,, & 0 < x < \pi\,. \end{cases}$$

Buscamos soluciones de la forma $X(x)T(t)$ que cumplan la ecuación y las condiciones de contorno, $X(0) = X(\pi) = 0$. Así se llega al mismo problema de Sturm-Liouville que antes: los valores propios son k^2, $k \geq 1$ y las funciones propias son $\sin kx$. La ecuación diferencial ordinaria para T_k con cada uno de éstos valores es

$$T_k''(t) + c^2 k^2 T_k(t) = 0,$$

que tiene como solución general, $T_k(t) = A \cos kct + B \sin kct$. Por tanto, una posible solución se escribe como

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos kct + B_k \sin kct) \sin kx$$

y se determinan los coeficientes con las condiciones iniciales.

Así queda que

$$A_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin kx\,dx \text{ y } ckB_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi g(x)\sin kx\,dx.$$

En este caso es más difícil estudiar la convergencia de la serie a partir del tamaño de los coeficientes. Se puede hacer indirectamente usando fórmulas trigonométricas y observando que la serie que representa a u es la que corresponde a la solución construida utilizando por el método de d'Alembert o de las características.

Las variantes con distinto tipo de condiciones de contorno o con segundo miembro a la derecha son como en el caso de la ecuación del calor. En particular, para resolver el problema no homogéneo

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x,t)\,, & 0 < x < \pi\,, t > 0\,, \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0\,, & t > 0\,, \\ u(x,0) = 0\,, & 0 < x < \pi\,, \\ u_t(x,0) = 0\,, & 0 < x < \pi, \end{cases} \tag{4.14}$$

y en analogía con el *metodo de variación de las constantes o de Duhamel*, intentamos escribir la solución de (4.14) como

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t)\sin kx. \tag{4.15}$$

Sustituyendo en la ecuación y si $F(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k(t)\sin kx$, se debe verificar que

$$\begin{cases} T_k''(t) + c^2k^2T_k(t) = C_k(t), \\ T_k(0) = T_k'(0) = 0, \end{cases}$$

para todo $k \geq 1$. Como conocemos las soluciones de la ecuación homogénea, por el método de variación de las constantes escribimos $T_k(t)$ como

$$A_k(t)\cos kct + B_k(t)\sin kct,$$

donde las funciones A_k y B_k verificarán

$$\begin{cases} A_k'(t)\cos kct + B_k'(t)\sin kct = 0, \\ -A_k'(t)\sin kct + B_k'(t)\cos kct = C_k(t)/kc, \\ A_k(0) = B_k(0) = 0, \end{cases} \tag{4.16}$$

si $k \geq 1$.

Las ecuaciones (4.16) implican formalmente que u es solución de (4.14). El análisis de la convergencia de la serie (4.15) y de la serie de sus derivadas parciales se puede hacer con el criterio de Weierstrass para la convergencia uniforme de series de funciones.

4.7. Separación de variables en otros dominios

Si Ω es un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$ con frontera regular y queremos resolver

$$\begin{cases} \triangle u - \partial_t u = 0, & \text{en } \Omega \times (0, +\infty), \\ u = 0, & \text{en } \partial\Omega \times [0, +\infty), \\ u(x, 0) = f(x), & \text{en } \Omega, \end{cases} \tag{4.17}$$

podemos empezar por buscar soluciones de variables separadas, X(x)T(t), que cumplan las condiciones de contorno. Esto da lugar a encontrar los $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que existe una solución no nula de

$$\begin{cases} \triangle X + \lambda X = 0, & \text{en } \Omega, \\ X = 0, & \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

y $e^{-\lambda t}X$ es una tal solución. Es conocido que la solución al problema de Sturm-Liouville es una familia numerable $\{e_k\}$ de funciones en $C^\infty(\overline{\Omega})$ que verifican

$$\begin{cases} \triangle e_k + \lambda_k^2 e_k = 0, & \text{en } \Omega, \\ e_k = 0, & \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \quad k = 1, 2, \ldots$$

donde

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \ldots \lambda_k \leq \ldots \;, \quad \lim_{k \to +\infty} \lambda_k = +\infty,$$

y que $\{e_k\}$ es un sistema completo en $L^2(\Omega)$. Estas funciones se denominan las autofunciones del operador de Laplace en Ω con condiciones de Dirichlet nulas. Así podemos construir la solución como

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k e^{-\lambda_k^2 t} e_k, \text{ si } a_k = \int_\Omega f e_k \, dx.$$

El problema

$$\begin{cases} \triangle v - \partial_t^2 v = 0, & \text{en } \Omega \times (0, +\infty), \\ v = 0, & \text{en } \partial\Omega \times [0, +\infty), \\ v(x, 0) = f(x), u_t(x, 0) = g(x) & \text{en } \Omega, \end{cases} \tag{4.18}$$

se resuelve escribiendo

$$v(x, t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(a_k \cos \lambda_k t + \tfrac{b_k}{\lambda_k} \sin \lambda_k t \right) e_k,$$

con

$$a_k = \int_\Omega f e_k \, dx \quad \text{y} \quad b_k = \int_\Omega g e_k \, dx.$$

Capítulo 5

La ecuación del potencial en el plano

5.1. Los problemas de Dirichlet y Neumann.

• En física aparecen campos incompresibles (conservativos) e irrotacionales: campos magnéticos, flujos de temperatura, velocidades de fluidos, etc. Si $V = Pi + Qj$ es un tal campo en $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, lo anterior corresponde respectivamente a que su divergencia y rotacional

$$\nabla \cdot V = \partial_x P + \partial_y Q \quad , \quad \nabla \times V = (\partial_x Q - \partial_y P)k,$$

sean nulos en Ω. Un campo irrotacional es el gradiente de una función $u : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $V = \nabla u$, que es única excepto por contantes y que se denomina el potencial del campo V. Como

$$\nabla \cdot V = \nabla \cdot (\nabla u) = \triangle u = 0, \text{ en } \Omega,$$

el potencial es una función armónica.

En general se pueden hacer mediciones de V en la frontera de Ω y conocer la componente normal de V $(V \cdot \nu)$ o su componente tangential $(V \cdot t)$ en $\partial\Omega$, donde ν y t son los vectores normal y tangencial unitarios a $\partial\Omega$. Esto equivale a conocer la derivada normal de u en $\partial\Omega$ $(V \cdot \nu = \nabla u \cdot \nu)$ o los valores de u en $\partial\Omega$. Para entender el segundo caso, si $u \in C^1(\overline{\Omega})$ y $\partial\Omega = \{\sigma(t) : t \in [0,1]\}$, donde $\sigma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ es una parametrización periódica del borde de Ω, se verifica que

$$\begin{aligned} u(\sigma(t)) &= u(\sigma(0)) + \int_0^t \nabla u(\sigma(\tau)) \cdot \dot{\sigma}(\tau)\, d\tau \\ &= u(\sigma(0)) + \int_0^t V(\sigma(\tau)) \cdot t(\tau) |\dot{\sigma}(\tau)|\, d\tau = u(\sigma(0)) + \int_{\gamma_t} P\, dx + Q\, dy, \end{aligned}$$

donde γ_t es el arco orientado en $\partial\Omega$ que conecta $\sigma(0)$ con $\sigma(t)$. Por tanto, los valores de V en Ω quedan determinados por el valor del gradiente de cualquiera de las soluciones de los problemas,

$$\begin{cases} \triangle u_1 = 0, & \text{en } \Omega, \\ \frac{\partial u_1}{\partial \nu} = h, & \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} \triangle u_2 = 0, & \text{en } \Omega, \\ u_2 = f, & \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

donde h y f son las mediciones que se tengan de V en la frontera de Ω y supuesto que los gradientes de las soluciones son únicos; es decir, que ambos problemas tengan solución "única"...

• El primer problema se llama problema de Neumann y el segundo de Dirichlet y si Ω es acotado los dos tienen solución única en $C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$.

Demostración. Si $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ es armónica en Ω y u o $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ es cero en $\partial\Omega$,

$$\nabla \cdot (u\nabla u) = u\triangle u + |\nabla u|^2 = |\nabla u|^2$$

y por el teorema de la divergencia,

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx = \int_\Omega \nabla \cdot (u\nabla u) \, dx = \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial u}{\partial \nu} \, d\sigma = 0.$$

□

• Si Ω es un dominio simplemente conexo y $\Psi : B \longrightarrow \Omega$ es la transformación conforme de Riemann de la bola unidad B en Ω, las funciones $U_i = u_i \circ \Psi$, $i = 1, 2$, son armónicas en B y verifican

$$\begin{cases} \triangle U_1 = 0, & \text{en } B, \\ \frac{\partial U_1}{\partial \nu} = h \circ \Psi|\Psi'|, & \text{en } \partial B, \end{cases} , \quad \begin{cases} \triangle U_2 = 0, & \text{en } B, \\ U_2 = f \circ \Psi, & \text{en } \partial B. \end{cases}$$

Esto justifica que intentemos resolver el problema de Dirchlet en el círculo

$$\begin{cases} \triangle u = 0, & \text{en } B, \\ u = f, & \text{en } \partial B, \end{cases} \tag{5.1}$$

y encontraremos una solución u en $C^\infty(B) \cap C(\overline{B})$, si $f \in C(\partial B)$.

Utilizando coordenadas polares (r, θ), f se convierte en una función continua y periódica de periodo 2π,

$$\varphi(\theta) = f(\cos\theta, \sin\theta) \quad \text{y} \quad u(r, \theta) = u(r\cos\theta, r\sin\theta),$$

tendrá que estar en $C^\infty([0, 1) \times [-\pi, \pi]) \cap C([0, 1] \times [-\pi, \pi])$ y ser, junto con sus derivadas parciales, periódica de periodo 2π para cada $0 \leq r \leq 1$.

En la nuevas coordenadas, el problema de Dirichlet (5.1) se reduce a encontrar $u \in C^\infty([0,1) \times [-\pi,\pi]) \cap C([0,1] \times [-\pi,\pi])$, periódica de periodo 2π y tal que

$$\begin{cases} u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} = 0, & \text{en } [-\pi,\pi] \times [0,1), \\ u(1,\theta) = f(\theta), & \text{en } [-\pi,\pi]. \end{cases} \tag{5.2}$$

En estas coordenadas es posible resolver (5.2) por separación de variables. Las soluciones en variables separadas no nulas, $R(r)\Theta(\theta)$, nos lleva a las ecuacíónes

$$-\frac{r^2 R'' + rR'}{R} = \frac{\Theta''}{\Theta} = -\lambda.$$

Así tendremos el problema de Sturm-Liouville

$$\Theta'' + \lambda\Theta = 0, \quad \Theta \text{ y sus derivadas son periódicas de periodo } 2\pi,$$

que equivale a encontrar los $\lambda \in \mathbb{R}$ tales que

$$\begin{cases} \Theta'' + \lambda\Theta = 0, \ \text{en } [-\pi,\pi], \\ \Theta(-\pi) = \Theta(\pi), \Theta'(-\pi) = \Theta'(\pi), \end{cases} \tag{5.3}$$

tiene solutiones no nulas. Esto ocurre si $\lambda = 0$ con $\Theta \equiv 1$ o $\lambda = k^2$ y $\Theta_k = A\cos k\theta + B\sin k\theta$, si $k \geq 1$.

Demostración. Si $\lambda = 0$, $\Theta = A\theta + B$, con $A,\ B$ en $\mathbb{R}$ y para ser periódica A deber ser cero. Es decir, $\Theta_0 = 1$ es solución con $\lambda_0 = 0$. Si $\lambda < 0$, $\Theta = Ae^{\sqrt{-\lambda}\,\theta} + Be^{-\sqrt{-\lambda}\,\theta}$ y que Θ y Θ' sean periódicas nos lleva al sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} A\sinh(\sqrt{-\lambda}\,\pi) - B\sinh(\sqrt{-\lambda}\,\pi) = 0, \\ A\sinh(\sqrt{-\lambda}\,\pi) + B\sinh(\sqrt{-\lambda}\,\pi) = 0. \end{cases}$$

El determinante de la matriz de coeficientes del sistema anterior es

$$2\sinh^2(\sqrt{-\lambda}\pi) \neq 0,$$

y su única solución es $A = B = 0$. Si $\lambda > 0$, $\Theta = A\cos(\sqrt{\lambda}\,\theta) + B\sin(\sqrt{\lambda}\,\theta)$ y las condiciones de contorno implican que

$$\begin{cases} A\cos(\sqrt{\lambda}\,\pi) + B\sin(\sqrt{\lambda}\,\pi)B = A\cos(\sqrt{\lambda}\,\pi) - B\sin(\sqrt{\lambda}\,\pi)B, \\ -A\sin(\sqrt{\lambda}\,\pi) + B\cos(\sqrt{\lambda}\,\pi)B = A\sin(\sqrt{\lambda}\,\pi) + B\cos(\sqrt{\lambda}\,\pi)B, \end{cases}$$

que tiene solución no nula si $\sin(\sqrt{\lambda}\,\pi) = 0$; es decir, para $\lambda_k = k^2$, $k \geq 1$ y con $\Theta_k = A_k\cos k\theta + B_k\sin k\theta$. $\square$

Resolvemos la EDO para R según los valores hallados de λ

$$r^2R'' + rR' - \lambda R = r\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right) - \lambda R = 0.$$

La ecuación es de tipo Euler y por el cambio de variables $r = e^s$, $r\frac{d}{dr} = \frac{d}{ds}$, es equivalente a

$$\frac{d^2R}{ds^2} - \lambda R = 0.$$

Si $\lambda = 0$ tenemos que, $R(r) = A\log r + B$ y si $\lambda = k^2$, $R(r) = Ar^{-k} + Br^k$. *Para que* u *sea continua en* 0 *debemos eliminar las soluciones de variables separadas que no lo son, las asociadas a* $\log r$ *y* r^{-k} y con las restantes escribimos formalmente

$$u(r,\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} r^k(a_k\cos k\theta + b_k\sin k\theta). \tag{5.4}$$

Si pedimos a u que cumpla la condición de contorno, deducimos que a_k y b_k deben ser los coeficientes de Fourier de f en $L^2(-\pi,\pi)$.

• Lo que acabamos de hacer en coordenadas polares (r,θ) se reconstruye en las coordenadas cartesianas (x,y) de la siguiente forma: primero recordamos que

$$r^k\left(\cos k\theta + i\sin k\theta\right) = (x+iy)^k = P_k(x,y) + iQ_k(x,y), \text{ si } k \geq 0,$$

donde P_k y Q_k son polinomios armónicos homogéneos de grado k,

$$P_k(\lambda x, \lambda y) = \lambda^k P_k(x,y),\ Q_k(\lambda x, \lambda y) = \lambda^k Q_k(x,y), \text{ si } \lambda > 0,$$

con coeficientes reales - unas funciones armónicas muy particulares - e intentamos escribir una posible solución de (5.1) como

$$u(x,y) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k P_k(x,y) + b_k Q_k(x,y).$$

Los polinomios P_k y Q_k se pueden encontrar en las coordenadas originales planteándose el problema de buscar todos los polinomios armónicos homogéneos de grado $k \geq 1$ en dos variables,

$$P(x,y) = \sum_{j=0}^{k} a_j x^j y^{k-j}.$$

Al imponer la condición $\Delta P = 0$, se verifica que necesariamente

$$P = a\,P_k + b\,Q_k, \text{ con } a,b \in \mathbb{R}.$$

Regularidad

Si $f \in L^1(-\pi,\pi)$, los coeficientes a_k y b_k están acotados y la serie converge absoluta y uniformemente en la bola $B(0, 1-\rho)$, para todo $0 < \rho < 1$ y se puede derivar dentro de la suma tantas veces como se quiera: u está en $C^\infty(B)$ y $\triangle u = 0$ en el interior de B.

Demostración. Por Weierstrass y la acotación

$$|k^l r^k (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta)| \le C_l \|f\|_{L^1(-\pi,\pi)} (1 - \tfrac{\rho}{2})^k,$$

si $r \le 1-\rho$, $k, l \ge 0$ y $\theta \in \mathbb{R}$. $\square$

Núcleo de Poisson

Sustituyendo a_k y b_k por su fórmula de cálculo en (5.4) se verifica que

$$\begin{aligned} u(r,\theta) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\phi) \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} r^k \cos k(\theta - \phi) \right] d\phi \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\phi) P_r(\theta - \phi)\, d\phi, \end{aligned}$$

donde

$$P_r(\theta) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} r^k \cos k\theta = \frac{1 - r^2}{2(1 - 2r\cos\theta + r^2)}$$

es el *núcleo de Poisson.*

Demostración. La fórmula anterior es consecuencia de la relación trigonométrica

$$\cos k(\theta - \phi) = \cos k\theta \cos k\phi + \sin k\theta \sin k\phi,$$

de las fórmulas para a_k, b_k, de que

$$\begin{aligned} &[r^2 + 1 - 2r\cos\theta] \sum_1^\infty r^k \cos k\theta \\ &= \sum_1^\infty \{ [r^{k+2} + r^k] \cos k\theta - r^{k+1} [\cos{(k+1)\theta} + \cos{(k-1)\theta}] \} \\ &= \sum_1^\infty r^{k+2} \cos k\theta + \sum_1^\infty r^k \cos k\theta - \sum_2^\infty r^k \cos k\theta - \sum_0^\infty r^{k+2} \cos k\theta \\ &= r\cos\theta - r^2, \end{aligned}$$

de donde se deduce que

$$\sum_1^\infty r^k \cos k\theta = \frac{r\cos\theta - r^2}{r^2 + 1 - 2r\cos\theta}$$

y de sumar $1/2$ a la suma infinita anterior. $\square$

Si $x = (x_1, x_2)$, $x_1 = r\cos\theta$, $x_2 = r\sin\theta$ y si $|y| = 1$, $y = (\cos\phi, \sin\phi)$, la longitud de arco en ∂B es $d\sigma = d\phi$ y

$$\frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\theta - \phi) + r^2} = \frac{1 - |x|^2}{|x - y|^2},$$

de donde

$$u(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\partial B} \frac{1 - |x|^2}{|x - y|^2} f(y)\, d\sigma(y). \tag{5.5}$$

Si en el razonamiento anterior hacemos $f \equiv 1$, como el desarrollo en serie de Fourier de la función constante 1 es trivial, sale que $u \equiv 1$; es decir,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\partial B} \frac{1 - |x|^2}{|x - y|^2}\, d\sigma(y) = 1, \text{ si } |x| < 1.$$

Continuidad hasta el borde

Hemos visto que $u \in C^\infty(B)$, si $f \in L^1(\partial B)$. Si además $f \in C(\partial B)$, entonces $u \in C(\overline{B})$ y $u = f$ en ∂B.

Demostración. Si $y_0 \in \partial B$ y $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|f(y) - f(y_0)| < \epsilon$, si $|y - y_0| < \delta$, $|y| = 1$. Entonces,

$$\begin{aligned} u(x) - u(y_0) &= \frac{1}{2\pi}\int_{\partial B} \frac{1 - |x|^2}{|x - y|^2}(f(y) - f(y_0))\, d\sigma(y) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\partial B \cap B_\delta(y_0)} \frac{1 - |x|^2}{|x - y|^2}(f(y) - f(y_0))\, d\sigma(y) \\ &+ \frac{1}{2\pi}\int_{\partial B \setminus B_\delta(y_0)} \frac{1 - |x|^2}{|x - y|^2}(f(y) - f(y_0))\, d\sigma(y). \end{aligned}$$

La primera integral es menor que ϵ. La segunda, está acotada por

$$2\|f\|_{L^\infty(\partial B)} \frac{1 - |x|^2}{(\delta/2)^2}, \text{ si } |x| \le \delta/2$$

y tiende a cero, si $x \in \overline{B}$ se acerca a y_0. □

Círculo de radio R

Si $x_0 \in \mathbb{R}^2$, $R > 0$ y $\varphi \in C(\partial B_R(x_0))$. Una función u en $C^2(B_R(x_0)) \cap C(\overline{B}_R(x_0))$ es solución del problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \triangle u = 0, & \text{en } B_R(x_0), \\ u = \varphi, & \text{en } \partial B_R(x_0), \end{cases} \tag{5.6}$$

si $v(\xi) = u(x_0 + R\xi)$ es solución en $C^2(B) \cap C(\overline{B})$ de (5.1) con $f(\xi) = \varphi(x_0 + R\xi)$. Para el círculo unidad sabemos como construir una solución de

(5.5) y deshaciendo el cambio de variables, obtenemos una solución de (5.6). De (5.5),

$$u(x_0 + R\xi) = \frac{1}{2\pi}\int_{\partial B} \frac{1-|\xi|^2}{|\xi - y|^2}\varphi(x_0 + Ry)\, d\sigma(y), \text{ si } |\xi| < 1.$$

y escribiendo $x = x_0 + R\xi$,

$$u(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\partial B} \frac{R^2 - |x-x_0|^2}{|x - (x_0 + Ry)|^2}\varphi(x_0 + Ry)\, d\sigma(y), \text{ si } |x - x_0| < R.$$

Finalmente, parametrizando ∂B como $y = e^{i\theta}$, $-\pi \le \theta \le \pi$, $x_0 + Re^{i\theta}$ es una parametrización de $\partial B_R(x_0)$ y

$$u(x) = \frac{1}{2\pi R}\int_{\partial B_R(x_0)} \frac{R^2 - |x-x_0|^2}{|x - y|^2}\varphi(y)\, d\sigma(y), \text{ si } |x - x_0| < R, \tag{5.7}$$

es una solución de (5.6) que hemos construido utilizando el método se separación y cambios de variables.

Algunas propiedades de esta solución.

La solución (5.7) verifica las siguientes propiedades:

•*Principio del máximo y del mínimo.*

$$\min_{\partial B_R(x_0)} f \le u(x) \le \max_{\partial B_R(x_0)} f, \text{ si } x \in B_R(x_0).$$

Demostración. Observad que

$$\frac{1}{2\pi R}\int_{\partial B_R(x_0)} \frac{R^2 - |x-x_0|^2}{|x - y|^2}\, d\sigma(y) = 1, \text{ si } |x - x_0| < R.$$

□

•*Propiedad del valor medio.*

$$u(x_0) = \frac{1}{2\pi R}\int_{\partial B_R(x_0)} f\, d\sigma.$$

Demostración. Haced $x = x_0$ en (5.7). □

•*Desigualdad de Harnack.* Si $u \ge 0$ en $B_R(x_0)$; es decir, si $\varphi \ge 0$ en $\partial B_R(x_0)$, entonces

$$\frac{R - |x-x_0|}{R + |x-x_0|}u(x_0) \le u(x) \le \frac{R + |x-x_0|}{R - |x-x_0|}u(x_0), \tag{5.8}$$

para todo $x \in B_R(x_0)$. Además,

$$\sup_{B_{R/2}(x_0)} u \le 9 \inf_{B_{R/2}(x_0)} u.$$

Demostración. Observad que

$$\frac{R-|x-x_0|}{R+|x-x_0|} \le \frac{R^2-|x-x_0|^2}{|x-y|^2} \le \frac{R+|x-x_0|}{R-|x-x_0|},$$

si $x \in B_R(x_0)$ e $y \in \partial B_R(x_0)$. Para la segunda desigualdad, utilizad (5.7) y que

$$\frac{R+|x-x_0|}{R-|x-x_0|} \le 3, \quad \frac{R-|x-x_0|}{R+|x-x_0|} \ge \frac{1}{3},$$

si $x \in B_{\frac{R}{2}}(x_0)$ e $y \in \partial B_R(x_0)$. □

5.2. Principio del máximo

Teorema 16 (Principio del máximo débil)**.** *Sea Ω un abierto acotado del plano y $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. Si $\triangle u \ge 0$ en Ω, entonces*

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u.$$

Demostración. Si $\triangle u > 0$ en Ω y u alcanza su máximo en $\overline{\Omega}$ en algún x en Ω, la matriz Hessiana de u en x es semidefinida negativa y su traza $\triangle u$, es menor o igual que 0. Si $\triangle u \ge 0$, aplicar lo anterior a $u_\epsilon = u + \epsilon|x|^2$ y hacer tender ϵ a cero. □

El principio del máximo implica que el problema de Dirichlet para el operador de Laplace tiene a lo más una solución $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$.

Teorema 17 (Propiedad del valor medio)**.** *Sea Ω un abierto del plano, $u \in C^2(\Omega)$ armónica en Ω, $x_0 \in \Omega$ y $R > 0$ tal que $\overline{B}_R(x_0) \subset \Omega$. Entonces,*

$$u(x_0) = \frac{1}{2\pi R}\int_{\partial B_R(x_0)} u(y)\, d\sigma.$$

Demostración. Por la unicidad de solución para problema de Dirichlet, u coincide en $B_R(x_0)$ con la solución v construida en (5.7) para

$$\begin{cases} \triangle u = 0, & \text{en } B_R(x_0), \\ v = u, & \text{en } \partial B_R(x_0), \end{cases}$$

y esta verifica la propiedad del valor medio en $B_R(x_0)$. □

El recíproco también es cierto.

Teorema 18. *Si u en $C(\Omega)$ cumple la propiedad del valor medio, entonces u es C^∞ en Ω y es armónica en Ω.*

Demostración. La función

$$\rho(x) = \begin{cases} Ne^{-\frac{1}{1-|x|^2}}, & \text{si } |x| < 1, \\ 0, & \text{si } |x| \geq 1, \end{cases}$$

es C^∞ en $\mathbb{R}^2$, tiene integral igual a 1 si N se elige de forma adecuada. Si definimos

$$u_\epsilon(x) = \int_\Omega \epsilon^{-2}\rho(\tfrac{x-y}{\epsilon})u(y)\,dy,$$

u_ϵ es C^∞ en $\mathbb{R}^2$. Por la propiedad del valor medio e integración en coordenadas polares,

$$\begin{aligned} u_\epsilon(x) = \int_{B_\epsilon(x)} \epsilon^{-2}\rho(\tfrac{x-y}{\epsilon})u(y)\,dy = \int_0^\epsilon \int_{\partial B_r(x)} \frac{1}{\epsilon^2}\rho(\tfrac{r}{\epsilon})u(y)\,d\sigma dr \\ = u(x)\int_0^\epsilon \tfrac{2\pi r}{\epsilon^2}\rho(\tfrac{r}{\epsilon})\,dr = u(x)\int_{\mathbb{R}^2}\rho(y)\,dy = u(x), \end{aligned}$$

si $d(x, \partial\Omega) > \epsilon$. Por tanto, u es C^∞ en Ω. Para ver que u es armónica en Ω, desarrollamos por Taylor hasta orden 2 alrededor de x en Ω,

$$u(y) = u(x) + \nabla u(x)\cdot(y-x) + \tfrac{1}{2}D^2u(x)(y-x)\cdot(y-x) + O(|y-x|^3),$$

y como

$$\tfrac{1}{2\pi r}\int_{\partial B_r(x)}(y_i - x_i)\,d\sigma = 0\ ,\ \tfrac{1}{2\pi r}\int_{\partial B_r(x)}(y_i-x_i)(y_j-x_j)\,d\sigma = \frac{r^2\delta_{ij}}{2},$$

si $i, j = 1, \ldots, n$, tendremos que

$$u(x) = \tfrac{1}{2\pi r}\int_{\partial B_r(x)} u(y)\,d\sigma = u(x) + \tfrac{r^2}{4}\triangle u(x) + O(r^3);$$

es decir,

$$0 = \tfrac{1}{4}\triangle u(x) + O(r),$$

y hacemos r tender hacia 0. □

Teorema 19 (Principio del máximo fuerte)**.** *Sea Ω es un abierto conexo en el plano y u en $C^2(\Omega)\cap C(\overline{\Omega})$ una función armónica en Ω. Si u alcanza en Ω un máximo o mínimo global, entonces u es constante en Ω.*

Demostración. Sea M el valor del máximo de u en $\overline{\Omega}$. Entonces,

$$H = \{x \in \Omega : u(x) = M\}$$

es no vacío, cerrado y por la propiedad del valor medio también es abierto en Ω: si $y \in H$

$$M = u(y) = \frac{1}{2\pi R}\int_{\partial B_R(y)} u(x)\,d\sigma\ ,\ \int_{\partial B_R(y)}(M - u(x))\,d\sigma = 0,$$

si $R < d(y, \partial\Omega)$. Pero $M - u \geq 0$ en Ω y concluimos que $u \equiv M$ en $B(y, d(y, \partial\Omega))$. Por tanto, $H = \Omega$ y u es constante en Ω. □

Teorema 20 (Un teorema de tipo Liouville)**.** *Si u es armónica en $\mathbb{R}^2$ y acotada inferiormente (o superiormente), entonces u es constante en $\mathbb{R}^2$.*

Demostración. Podemos suponer que $u \geq 0$ en $\mathbb{R}^2$. Entonces fijado $R > 0$, escribir la desigualdad de Harnack (5.8) para u en $B_R(0)$ y hacer tender R a infinito. Ello implica que $u(x) = u(0)$, para todo x en $\mathbb{R}^2$. Si $u \geq -M$, trabajar con $u + M$ y si $u \leq M$, trabajar con $M - u$. □

5.3. El problema no homogéneo en el círculo

El problema no homogéneo

$$\begin{cases} \triangle u = F, & \text{en } B, \\ u = 0, & \text{en } \partial B, \end{cases}$$

es equivalente en coordenadas polares a encontrar $u(r,\theta)$, periódica de periodo 2π junto con sus derivadas y tal que

$$\begin{cases} u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = F(r,\theta), & \text{en } [-\pi,\pi] \times [0,1), \\ u(1,\theta) = 0, & \text{en } [-\pi,\pi], \end{cases}$$

si $F(r,\theta) = F(r\cos\theta, r\sin\theta)$. Escribimos la posible solución como

$$u(r,\theta) = \frac{a_0(r)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(r)\cos k\theta + b_k(r)\sin k\theta.$$

Esta función será solución del problema no homogéneo si

$$\begin{cases} a_k'' + \frac{1}{r}a_k' + \frac{k^2}{r^2}a_k = F_k(r), & \text{en } [0,1),\ k \geq 0 \\ b_k'' + \frac{1}{r}b_k' + \frac{k^2}{r^2}b_k = G_k(r), & \text{en } [0,1),\ k \geq 1 \\ a_k(1) = b_k(1) = 0, & \\ a_k, b_k \text{ son acotadas en } [0,1], & \end{cases} \tag{5.9}$$

y

$$F(r,\theta) = \frac{F_0(r)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} F_k(r)\cos k\theta + G_k(r)\sin k\theta.$$

Las ecuaciones (5.9) se resuelven por el método de variación de las constantes.

5.4. El problema de Dirichlet en otros dominios circulares

También se pueden resolver por separación de variables otros problemas asociados al Laplaciano si se trabaja en coordenadas polares y sobre dominios como un anillo, el exterior de un círculo o en regiones limitadas por conos. En el caso de un anillo o del exterior de un círculo se plantea los problemas de encontrar u de clase C^2 en $B_{R_2} \setminus \overline{B}_{R_1}$, $0 < R_1 < R_2 < \infty$, continua en la clausura de $B_{R_2} \setminus B_{R_1}$ y tal que

$$\begin{cases} \triangle u = 0, & \text{en } B_{R_2} \setminus \overline{B}_{R_1}, \\ u = f_2, & \text{en } \partial B_{R_2}, \\ u = f_1, & \text{en } \partial B_{R_1}, \end{cases}$$

o de encontrar u de clase C^2 en $\mathbb{R}^n \setminus \overline{B}_R$, $R > 0$, continua y acotada en $\mathbb{R}^n \setminus B_R$ y tal que

$$\begin{cases} \triangle u = 0, & \text{en } \mathbb{R}^n \setminus \overline{B}_R, \\ u = f, & \text{en } \partial B_R. \end{cases}$$

En coordenadas polares los problems son respectivamente equivalentes a encontrar u de clase C^2 en $(R_1, R_2) \times [-\pi, \pi]$, periódica de periodo 2π junto con sus derivadas, continua en $[R_1, R_2] \times [-\pi, \pi]$ y tal que

$$\begin{cases} u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} = 0, & \text{en } (R_1, R_2) \times [-\pi, \pi], \\ u(R_2, \theta) = \varphi_2(\theta) = f_2(R_2 \cos\theta, R_2 \sin\theta), & \text{en } [-\pi, \pi], \\ u(R_1, \theta) = \varphi_1(\theta) = f_1(R_1 \cos\theta, R_1 \sin\theta), & \text{en } [-\pi, \pi], \end{cases}$$

o de encontrar u de clase C^2 en $(R, +\infty) \times [-\pi, \pi]$, periódica de periodo 2π junto con sus derivadas, continua y acotada en $[R, +\infty) \times [-\pi, \pi]$ y tal que

$$\begin{cases} u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} = 0, & \text{en } (R, +\infty) \times [-\pi, \pi], \\ u(R, \theta) = \varphi(\theta) = f(R \cos\theta, R \sin\theta), & \text{en } [-\pi, \pi]. \end{cases}$$

En el primer caso, lo razonable es escribir u como

$$\begin{aligned} u(r, \theta) = \frac{1}{2} (a_0 + b_0 \log r) + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{r}{R_2} \right)^k (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta) \\ + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{R_1}{r} \right)^k (d_k \cos k\theta + c_k \sin k\theta), \quad (5.10) \end{aligned}$$

donde los coeficientes a_k, b_k, d_k y c_k se determinan por comparación de series de Fourier e imponiendo que $u(R_1, \theta) = \varphi_1(\theta)$, $u_2(R_2, \theta) = \varphi_2(z)$. En el segundo, descartamos las soluciones de variables separadas que no son acotadas en $(R, +\infty) \times [-\pi, \pi]$ y escribimos u como

$$u(r, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{R}{r} \right)^k (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta), \quad (5.11)$$

donde a_k y b_k son los coeficientes de Fourier de φ.

Con un análisis similar al que hemos hecho con la solución generada por separación de variables para el problema de Dirichlet en el interior de una bola, se puede mostrar que las soluciones (5.10) y (5.11) son continuas y acotadas en la clausura de sus dominios cuando sus datos fronteras son continuos en la frontera del dominio.

El problema de Dirichlet en el exterior de una bola B_R tiene a lo más una solución en la clase de funciones $C^2(\mathbb{R}^2 \setminus \overline{B_R}) \cap C(\mathbb{R}^2 \setminus B_R) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus B_R)$: basta con considerar

$$u_\epsilon = \pm\, u - \epsilon \log \tfrac{r}{R},$$

aplicar el principio del máximo débil a u_ϵ en $B_{R'} \setminus \overline{B_R}$, donde $R' > R$ se elige grande para que $u_\epsilon \leq 0$ en $\partial B_{R'}$ y después se hace tender ϵ a cero para concluir que

$$\pm\, u(x) \leq \mp \max_{\partial B_R} u, \text{ si } x \in \mathbb{R}^2 \setminus B_R.$$

La condición de estar en $L^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus B_R)$ es necesaria para la unicidad, pues $u = \log R - \log r$ es armónica en $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{B}_R$, $u = 0$ en ∂B_R y u no es idénticamente nula.

También se puede usar separación de variables para resolver el problema de Dirichlet en la región limitada por las rectas $\theta = \alpha$, $\theta = \beta$ y la circunferencia $r = R$ y con datos de Dirichlet nulos en los lados rectilíneos del cono:

$$\begin{cases} u_{rr} + \frac{1}{r}\, u_r + \frac{1}{r^2}\, u_{\theta\theta} = 0, & 0 < r < R,\ \alpha < \theta < \beta, \\ u(r,\alpha) = u(r,\beta) = 0, & 0 \leq r < 1, \\ u(1,\theta) = f(\theta) & \alpha \leq \theta \leq \beta. \end{cases} \tag{5.12}$$

Las soluciones en variables separadas no nulas, $R(r)\Theta(\theta)$, nos lleva a las ecuaciónes

$$-\frac{r^2 R'' + rR'}{R} = \frac{\Theta''}{\Theta} = -\lambda$$

y a buscar los $\lambda \in \mathbb{R}$ tales que

$$\begin{cases} \Theta'' + \lambda\Theta = 0, \text{ en } (\alpha,\beta), \\ \Theta(\alpha) = \Theta(\beta) = 0, \end{cases}$$

tiene solución no nula. La solución son números positivos

$$\lambda_1^2 < \lambda_2^2 < \ldots < \lambda_k^2 \ldots$$

con soluciones asociadas $\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_k \ldots$ que forman un sistema completo en $L^2(\alpha,\beta)$. Las soluciones de variables separadas acotadas son $r^{\lambda_k}\Theta_k$ y la solución de (5.12) se escribe como

$$u(r,\theta) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k\, (r/R)^{\lambda_k}\, \Theta_k.$$

La separación de variables también se puede utilizar para resolver el problema de Dirichlet en un anillo limitado por un cono ($\theta = \alpha$ y $\theta = \beta$) y la circunferencias $r = R_1$ y $r = R_2$, $0 \le R_1 < R_2 \le \infty$, con datos de Dirichlet nulos en los lados rectilíneos del cono y dos funciones dadas sobre los arcos de las circunferencias dentro del cono. En este caso las soluciones de variables separadas son $r^{\pm\lambda_k}\Theta_k$ y la solución se puede escribir como

$$u(r,\theta) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \, (R_1/r)^{\lambda_k} \, \Theta_k + b_k \, (r/R_2)^{\lambda_k} \, \Theta_k.$$

5.5. El Problema de Neumann

Queremos encontrar $u \in C^\infty(B) \cap C^1(\overline{B})$ tal que

$$\begin{cases} \triangle u = 0, & \text{en } B, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = f, & \text{en } \partial B, \end{cases}$$

si $f \in C(\partial B)$. Todo es como en el problema de Dirichlet hasta que llegamos a (5.4). En ∂B el vector normal exterior es $(x,y)/r$ y $\frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial u}{\partial r}$ y por separación de variables, escribimos la posible solución como

$$u(r,\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} r^k (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta).$$

La condición de contorno de tipo Neumann obliga a que

$$\sum_{k=1}^{\infty} k(a_k \sin k\theta + b_k \cos k\theta) = f(\theta),$$

que sólo tiene solución si

$$\int_{\partial B} f \, d\sigma = 0.$$

Si esto se cumple, ka_k y kb_k deben ser los coeficientes de Fourier de f y la solución queda determinada excepto por la constante a_0.

La condición de integral nula para f es *necesaria* para la existencia de solución. En efecto, por el teorema de la divergencia

$$\int_B \triangle u \, dx = \int_{\partial B} \frac{\partial u}{\partial \nu} \, d\sigma.$$

5.6. La ecuación del potencial en un rectángulo

El problema de Dirichlet en el rectángulo $\Omega = [0,a] \times [0,b]$ para la ecuación de Laplace

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & \text{en } \Omega, \\ u = \varphi, & \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \tag{5.13}$$

con φ en $C(\partial\Omega)$, se reduce a resolver los problemas,

$$\begin{cases} v_{xx} + v_{yy} = 0, & 0 < x < a,\ 0 < y < b, \\ v(0,y) = v(a,y) = 0, & 0 < y < b, \\ v(x,0) = f_1(x),\ v(x,b) = f_2(x), & 0 < x < a, \end{cases} \tag{5.14}$$

$$\begin{cases} w_{xx} + w_{yy} = 0, & 0 < x < a,\ 0 < y < b, \\ w(0,y) = f_3(y), w(a,y) = f_4(y), & 0 < y < b, \\ w(x,0) = 0,\ w(x,b) = 0, & 0 < x < a. \end{cases} \tag{5.15}$$

y a sumar sus respectivas soluciones, $u = v + w$.

Para resolver (5.14) buscamos soluciones no nulas de variables separadas, $X(x)Y(y)$, que verifiquen la ecuación y las condiciones de Dirichlet en los laterales verticales del rectángulo:

$$\begin{cases} \frac{\ddot{X}}{X} = -\frac{\ddot{Y}}{Y} = -\lambda, \text{ para } (x,y) \text{ en } (0,a) \times (0,b), \\ X(0) = X(a) = 0, \end{cases}$$

para algún $\lambda \in \mathbb{R}$.

El problema de Sturm-Liouville es como los del capítulo anterior: los valores propios son $\lambda = (k\pi/a)^2$, $k \geq 1$ y las funciones propias asociadas, múltiplos de $\sin(k\pi x/a)$. La EDO para Y con estos valores propios tiene por solución general

$$A \cosh\left(\frac{k\pi y}{a}\right) + B \sinh\left(\frac{k\pi y}{a}\right)$$

y la solución del problema se puede escribir como

$$v(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[A_k \cosh\left(\frac{k\pi y}{a}\right) + B_k \sinh\left(\frac{k\pi y}{a}\right)\right] \sin\left(\frac{k\pi x}{a}\right).$$

Sustituyendo y por 0 y b e igualando a $f_1(x)$ y $f_2(x)$ respectivamente, se determinan los coeficientes por comparación de series Fourier. Para determinar A_k y B_k, hay que resolver un sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas, para cada $k \geq 1$.

El problema (5.13) se resuelve descomponiendo φ en suma de dos funciones que con valores frontera no nulos en los lados opuestos del rectángulo Ω, resolviendo el análogo del problema (5.14) cambiando los lados horizontales del cuadrado por los verticales; es decir, el (5.15) y escribiendo la solución de (5.13) como $u = v + w$.

Para el problema no homogéneo

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = F, & 0 < x < a,\ 0 < y < b, \\ u(0,y) = u(a,y) = 0, & 0 < y < b, \\ u(x,0) = 0,\ u(x,b) = 0, & 0 < x < a, \end{cases}$$

escribimos una posible solución como

$$u(x,y)=\sum_{k=1}^{+\infty} Y_k(y)\sin\left(\frac{k\pi x}{a}\right),$$

donde las funciones Y_k son las soluciones de

$$\begin{cases} Y_k'' - \left(\frac{k\pi}{a}\right)^2 Y_k = F_k(y), \ 0<y<b, \\ Y_k(0)=Y_k(b)=0 \end{cases}$$

y

$$F(x,y)=\sum_{k=0}^{+\infty} F_k(y)\sin\left(\frac{k\pi x}{a}\right), \text{ en } [0,a]\times[0,b],$$

es la serie de Fourier de $F(\,\cdot\,,y)$ en $[0,a]$.

El problema en un cilindro infinito

Se considera el problema siguiente: encontrar u *acotada* tal que

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0, & 0<x<a, \ y>0, \\ u(0,y)=u(a,y)=0, & y>0, \\ u(x,0)=f(x), & 0<x<a. \end{cases}$$

La primera parte es igual que en el caso anterior: para que la solución sea acotada en el cilindro $[0,a]\times[0,+\infty)$, excluimos $e^{k\pi y/a}$ y queda

$$u(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty} B_k e^{-k\pi y/a}\sin\left(\tfrac{k\pi x}{a}\right). \tag{5.16}$$

Los coeficientes B_k se determinan a partir de la serie de Fourier de f.

• La solución es única en la clase de funciones

$$C^2((0,a)\times(0,+\infty))\cap C([0,a]\times[0,+\infty))\cap L^\infty([0,a]\times[0,+\infty)).$$

• Se puede comprobar que (5.16) verifica estas condiciones si f es continua en $[0,a]$ y $f(0)=f(a)$.

5.7. La ecuación del potencial en un semiplano

Consideramos el problema

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0, & x\in\mathbb{R}, \ y>0, \\ u(x,0)=f(x), & x\in\mathbb{R}. \end{cases} \tag{5.17}$$

• La ecuación homogénea tiene soluciones no nulas que se anulan en la frontera, $u(x,y)=y$, por lo que no hay unicidad sin condiciones adicionales.

El siguiente principio del máximo para el semiplano superior muestra que (5.17) tiene a lo más una solución u en $C^2(\mathbb{R}^2_+)\cap C(\overline{\mathbb{R}^2_+})$ que es acotada.

Teorema 21. *Si $u\in C^2(\mathbb{R}^2_+)\cap C(\overline{\mathbb{R}^2_+})$ verifica $u\le M$ para algún $M\ge 0$ y $\triangle u\ge 0$ en $\mathbb{R}^2_+$. Entonces,*

$$\sup_{\mathbb{R}^2_+} u \le \sup_{\mathbb{R}} f.$$

Demostración. Sean $\Omega_T = B_T(x_0)\times(0,T)$, si $T>0$, $x_0\in\mathbb{R}$ y

$$u_T = u - \frac{1}{T^{\frac{3}{2}}}(x-x_0)^2 + \frac{y}{T^{\frac{3}{2}}}(y-2T).$$

Se verifica que

$$\triangle u_T \ge 0, \text{ en } \Omega_T$$

y por el principio del máximo débil para abiertos acotados

$$\sup_{\Omega_T} u_T \le \sup_{\partial\Omega_T} u_T.$$

En la frontera lateral de Ω_T, $u_T\le M-\sqrt{T}\le \sup_{\mathbb{R}} f$, si T es grande. En la superior, $u_T\le M-\sqrt{T}\le \sup_{\mathbb{R}} f$, si T es grande. Entonces,

$$u_T(x_0,y) = u(x_0,y) + \frac{y}{T^{\frac{3}{2}}}(y-2T) \le \sup_{\mathbb{R}} f, \text{ si } 0\le y\le T$$

y hacemos T tender a $+\infty$. □

• Para resolver (5.17) buscamos soluciones autosemejantes: si $u(x,y)$ es armónica también lo es $u(\lambda x,\lambda y)$ y si es homogénea, $u(\lambda x,\lambda y)=\lambda^\alpha u(x,y)$, para todo $\lambda>0$,

$$u(x,y) = y^\alpha u\left(\frac{x}{y},1\right) = y^\alpha \Phi\left(\frac{x}{y}\right), \text{ si } y>0.$$

Si tenemos una solución, sus trasladadas en la variable x también son soluciones

$$y^\alpha \Phi(y^{-1}(x-z))$$

y usamos estas para escribir u como *"suma"* de soluciones

$$u(x,y) = y^\alpha \int_{-\infty}^{\infty} \Phi\left(\frac{x-z}{y}\right) c(z)\,dz = y^{\alpha+1}\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(z)c(x-zy)\,dz, \quad (5.18)$$

donde $c(z)$ debe ser elegido para que se cumpla la condición de contorno.

• Para que el límite cuando y tiende a cero en (5.18) no sea 0 o ∞ necesitamos que α sea -1 y que Φ sea integrable en $\mathbb{R}$. Para que el límite sea f elegimos $c = f$, si Φ tiene integral igual a 1 en $\mathbb{R}$. Para que el laplaciano de (5.18) sea nulo, Φ debe verificar la EDO

$$(1+s^2)\Phi''(s) - 2(\alpha-1)s\Phi'(s) + \alpha(\alpha-1)\Phi(s) = 0,$$

que cuando $\alpha = -1$ es

$$\big((1+s^2)\Phi\big)'' = 0.$$

Las soluciones integrables de esta ecuación son $\Phi(s) = N(1+s^2)^{-1}$ y la que tiene integral 1 corresponde a $N = 1/\pi$.

Así obtenemos que un candidato a solución de (5.17) es

$$u(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{y}{(x-z)^2+y^2} f(z)\,dz. \tag{5.19}$$

Teorema 22. *La función u definida por* (5.19) *está en* $C^\infty(\mathbb{R}^2_+)\cap C(\overline{\mathbb{R}^2_+})\cap L^\infty(\mathbb{R}^2_+)$*, si* $f\in C(\mathbb{R})\cap L^\infty(\mathbb{R})$ *y es solución de* (5.17).

Demostración. El nucleo

$$P(x,y) = \frac{1}{\pi}\frac{y}{x^2+y^2} = y^{-1}Q(x/y),\ \text{con } Q(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}\,,$$

verifica

$$|\partial_x^\alpha\partial_y^\beta P(x,y)| \le \frac{C(\alpha,\beta,\epsilon,R)}{1+x^2},\ \text{si } x\in\mathbb{R},\ \epsilon\le y\le R$$

y

$$|\partial_x^\alpha\partial_y^\beta P(x-z,y)| \le \frac{C(\alpha,\beta,\epsilon,R)}{1+z^2},\ \text{si } |x|\le R,\ z\in\mathbb{R} \text{ y } \epsilon\le y\le R,$$

que junto con el teorema de convergencia dominada muestra que u es regular para $y>0$.

Para acotar u, recordamos que

$$\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\frac{y}{(x-z)^2+y^2}\,dz = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{1+z^2}\,dz = 1,\ \text{si } y>0,$$

y

$$|u(x,y)| \le \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\left(\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\frac{y}{(x-z)^2+y^2}\,dz\right) \le \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})}.$$

Para la continuidad de u en $(x_0,0)$, dado $\epsilon>0$ existe un $\delta>0$ tal que, $|f(x)-f(x_0)|\le\epsilon$, si $|x-x_0|\le\delta$. Entonces,

$$\begin{aligned}|u(x,y)-f(x_0)| &\le \int_{B_\delta(x_0)} P(x-z,y)|f(z)-f(x_0)|\,dz\\ &\quad+\int_{\mathbb{R}\setminus B_\delta(x_0)} P(x-z,y)|f(z)-f(x_0)|\,dz\\ &\le \epsilon + 2\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\int_{\mathbb{R}\setminus B_\delta(x_0)} P(x-z,y)\,dz.\end{aligned}$$

Pero, $P(x-z,y) \leq NP(x_0-z,y)$, si $|x-x_0| \leq \frac{\delta}{2}$, $|z-x_0| \geq \delta$ y

$$\int_{\mathbb{R}\setminus B_\delta(x_0)} P(x-z,y)\,dz \leq N\int_{\mathbb{R}\setminus B_\delta(x_0)} P(x_0-z,y)\,dz = \tfrac{N}{\pi}\int_{|z|\geq \frac{\delta}{y}} \frac{1}{1+z^2}\,dz,$$

que tiende a cero, si y desciende hacia 0. $\square$

• Si f es par o impar respecto a l, $u(\,\cdot\,,y)$ también es par o impar respecto a l para todo $y>0$ y los problemas

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0, & \text{en } (0,+\infty)\times(0,+\infty),\\ u(0,y)=0, & \text{en } [0,+\infty)\\ u(x,0)=f(x), & \text{en } [0,+\infty), \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0, & \text{en } (0,a)\times(0,+\infty),\\ u(0,y)=u(a,y)=0, & \text{en } [0,+\infty)\\ u(x,0)=f(x), & \text{en } [0,a], \end{cases}$$

se pueden resolver por el método de reflexiones.

• La solución de estos dos problemas es única en la clase de funciones que son C^2 en el interior del dominio, continuas y acotadas en la clausura.

• Cuando f verifica la condición de compatibilidad que requieren los dos últimos problemas para que estos tengan una solución continua en la clausura de sus dominios, la solución generada por el método de reflexiones está en la clase de unicidad (Aquí conviene repasar las últimas líneas de la sección **5.6**).

Demostración. Suponemos que u y v son respectivamente soluciones acotadas de los problemas anteriores que verifican $|u|\leq M$ y $|v|\leq M$ en sus dominios para algún $M>0$, que son continuas en las clausuras de sus dominios y que $f\equiv 0$ en ambos casos. Si $u_\epsilon = \pm u - \epsilon(x+y)$, u_ϵ es menor o igual que cero en las frontera izquierda, superior y derecha de $(0,R)\times(0,R)$ y por el Principio del máximo en $(0,R)\times(0,R)$,

$$\sup_{(0,R)\times(0,R)} u_\epsilon \leq 0, \text{ si } R\geq R(\epsilon).$$

Si hacemos tender ϵ hacia cero, concluimos que $\pm u(x,y)\leq 0$, para todo (x,y) en el primer cuadrante.

En el caso de v, definimos $v_\epsilon = \pm v - \epsilon y$ y procedemos de la misma forma sustituyendo $(0,R)\times(0,R)$ por $(0,a)\times(0,R)$. $\square$

5.8. Separación de variables en dominios planos rectangulares

Si queremos resolver

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = 0, & \text{en } \Omega \times (0, +\infty), \\ u(x, y, 0) = f(x, y), & \text{en } \Omega, \\ u = 0, & \text{en } \partial\Omega \times (0, +\infty), \end{cases}$$

por separaciÛn de variables y con $\Omega = (0, \pi) \times (0, \pi)$, áse comprueba que $\{\sin kx \sin ly : k, l \geq 1\}$ es una familia completa en $L^2(\Omega)$. En particular, $e_{kl}(x, y) = \frac{2}{\pi} \sin kx \sin ly$, $k, l \geq 1$, son autofunciones del operadores de Laplace en Ω con condiciones de Dirichlet nulas; es decir,

$$\begin{cases} \Delta e_{kl} + \left(k^2 + l^2\right) e_{kl} = 0, & \text{en } \Omega, \\ e_{kl} = 0, & \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

y las soluciones u y v de las evoluciones (4.17) y (4.18) son respectivamente

$$u(x, y, t) = \sum_{k,l \geq 0} a_{kl} e^{-\left(k^2+l^2\right)t} \sin kx \sin ly$$

y

$$v(x, y, t)$$
$$= \sum_{k,l \geq 0} \left[a_{kl} \cos\left(\sqrt{k^2 + l^2}\ t\right) + \frac{b_{kl}}{\sqrt{k^2 + l^2}} \sin\left(\sqrt{k^2 + l^2}\ t\right) \right] \sin kx \sin ly,$$

donde a_{kl} y b_{kl} son los coeficientes de Fourier de los datos iniciales en la base $\{\sin kx \sin ly : k, l \geq 1\}$.

Que $\{e_{kl} : k, l \geq 1\}$ es una familia ortonormal completa en $L^2(\Omega)$, se deduce de que $\{\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin kx : k \geq 1\}$ es una familia ortonormal completa en $L^2(0, \pi)$.

Demostración. Los elementos de esta familia son ortogonales en $L^2(\Omega)$ porque

$$\int_\Omega e_{k_1 l_1} e_{k_2 l_2}\, dxdy = \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \int_0^\pi \sin k_1 x \sin k_2 x\, dx \int_0^\pi \sin l_1 x \sin l_2 x\, dx = 0,$$

si $(k_1, l_1) \neq (k_2, l_2)$, e igual a 1 si $(k_1, l_1) = (k_2, l_2)$.

Como sabemos, si $\{\varphi_k : k \geq 1\}$ es una familia ortonormal en $L^2(\Omega)$, h está en $L^2(\Omega)$ y a_k son los coeficientes de Fourier de h respecto a dicha familia, se verifican la identidad y desigualdad de Bessel:

$$\|h - \sum_{k=1}^N a_k \varphi_k\|^2_{L^2(\Omega)} = \|h\|^2_{L^2(\Omega)} - \sum_{k=1}^N \left(\int_\Omega h\varphi_k\, dx\right)^2 \tag{5.20}$$

y

$$\|\sum_{k=1}^{N} a_k\varphi_k\|_{L^2(\Omega)} \leq \|h\|_{L^2(\Omega)}. \tag{5.21}$$

Esto lo vimos en la demostración de la desigualdad de Bessel para familias ortogonales y aquí os aconsejo comparar las fórmulas anteriores con (4.6) y (4.12). Si f está en $C(\overline{\Omega})$, sabemos que

$$f(x,y) = \sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\sum_{k=1}^{+\infty} a_k(y)\sin kx, \text{ en } L^2(0,\pi)\cap C(\overline{\Omega}), \text{ para cada } y\in(0,\pi),$$

con

$$a_k(y) = \sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\int_0^\pi f(x,y)\sin kx\,dx, \text{ si } k\geq 1$$

y por Parseval

$$\int_0^\pi f(x,y)^2\,dx = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k(y)^2 = \tfrac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\int_0^\pi f(x,y)\sin kx\,dx\right)^2, \text{ si } 0\leq y\leq\pi. \tag{5.22}$$

Además, para cada $k\geq 1$,

$$\int_0^\pi f(x,y)\sin kx\,dx = \sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\sum_{l=1}^{+\infty} b_{kl}\sin ly, \text{ en } L^2(0,\pi)\cap C([0,\pi]),$$

con

$$b_{kl} = \sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\int_0^\pi\int_0^\pi f(x,y)\sin kx\sin ly\; dxdy,$$

y

$$\begin{aligned}\int_0^\pi\left(\int_0^\pi f(x,y)\sin kx\,dx\right)^2 dy &= \sum_{l=1}^{+\infty} b_{kl}^2\\ &= \tfrac{2}{\pi}\sum_{l=1}^{+\infty}\left(\sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\int_0^\pi\int_0^\pi f(x,y)\sin kx\sin ly\; dxdy\right)^2.\end{aligned} \tag{5.23}$$

Si integramos (5.22) respecto a dy en $[0,\pi]$, el teorema de convergencia monótona y (5.23) muestran que

$$\int_\Omega f^2\,dxdy = \frac{4}{\pi^2}\sum_{k,l\geq 1}\left(\int_\Omega f(x,y)\sin kx\sin ly\; dxdy\right)^2.$$

Lo último y la identidad de Bessel para la familia $\{e_{kl} : k,l\geq 1\}$, muestran que la serie de Fourier de f para $\{e_{kl} : k,l\geq 1\}$, converge hacia f en $L^2(\Omega)$. En general, si f está en $L^2(\Omega)$, procedemos como en la demostración de la identidad de Parseval-Plancherel para las series de Fourier clásicas, a partir de la desigualdad de Bessel (5.21) y utilizando que $C(\overline{\Omega})$ es denso en $L^2(\Omega)$.

□