ANÁLISIS DE VARIAS VARIABLES I. Enero 2007

1. Sea

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y \sin(x+y)}{x^2+y^2} \ , & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \ , \\ 0 \ , & \text{si } (x,y) = (0,0) \ . \end{cases}$$

• Mostrar que f es C^1 en $\mathbb{R}^2$.

• Estudiar la diferenciabilidad de $\frac{\partial f}{\partial x}$.

• Mostrar que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ en el origen y explicar por qué esto no contradice el teorema de Young.

2. • Mostrar que la ecuación

$$\sin(x+y+z) + 2x + z^2 = 0 \ ,$$

determina a z como función C^∞ de las variables (x,y) cerca del $(0,0,0)$.

• Calcular el polinomio de Taylor de orden 2 de esta función en el $(0,0)$.

3. Calcular $\frac{\partial h}{\partial y}$ y $\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}$ si $h(x,y,z) = f(x^{y^z}, x-y, y^2-z^2)$ y $f(u,v,w)$ es una función regular en $\mathbb{R}^3$.

4. • Mostrar que la transformación

$$\begin{cases} u = y + e^{-x} \ , \\ v = -x + e^{-y}, \end{cases}$$

define a (x,y) como función C^2 de las variables (u,v) para (x,y) cerca de $(0,0)$ y (u,v) cerca de $(1,1)$.

• Calcular la ecuación del plano tangente a $x = x(u,v)$ en $(1,1)$ en el espacio (u,v,x).

5. • Hallar los extremos absolutos de $f(x,y) = \frac{xy}{(1+x)(2+y)}$ en el cuadrado [1,2] $\times$ $[1,2]$.

• Estudiar los extremos de $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$ ¿Es alguno de ellos un extremo absoluto?

6. • Enunciar y demostrar el teorema del valor medio.

• Sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función regular que verifica $f(2,2,2) = f(1,1,1)$. Mostrar que existe un θ en $[1,2]$ tal que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\theta,\theta,\theta) + \frac{\partial f}{\partial y}(\theta,\theta,\theta) + \frac{\partial f}{\partial z}(\theta,\theta,\theta) = 0 \ .$$

• Explicar el polinomio de Taylor de orden 2 para una función

$$f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

que es $C^3(\Omega)$ y dar una fórmula para el error cometido al sustituir la función por el polinomio. Demostrar lo que se afirme.

ANÁLISIS DE VARIAS VARIABLES I. Setiembre 2007

1. Sea
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x\tan(x+y)}{\sqrt{x^2+y^2}} \ , & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \ , \\ 0 \ , & \text{si } (x,y) = (0,0) \ . \end{cases}$$

• Mostrar que f es continua en $\mathbb{R}^2$.

• Estudiar la diferenciabilidad de f en $\mathbb{R}^2$.

• ¿Es $\frac{\partial f}{\partial y}$ continua en $\mathbb{R}^2$?

Sugerencia: $\sqrt{x^2} = |x|$ y utilizar Taylor para calcular los primeros términos del desarrollo de Taylor de $\sec^2 u$ y $\tan u$.

2. • Mostrar que la ecuación
$$\cos(x - y - z + 1) - x^4 + z^3 - 2 = 0 \ ,$$
determina a la variable z como función C^∞ de (x,y) cerca de $(0,0,1)$.

• Calcular el polinomio de Taylor de orden 2 de esta función en el $(0,0)$.

3. Calcular $\frac{\partial^2 h}{\partial y \partial z}$ y $\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}$, si
$$h(x,y,z) = f(x^2 + y^3 + z^4, xyz)$$
y $f(u,v)$ es una función de clase 2 en $\mathbb{R}^3$.

4. Sea $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^4 y tal que $h(1) = 1$.

• Dar una condición que permita asegurar que las relaciones
$$\begin{cases} u = x + h(y) \ , \\ v = y + h(x), \end{cases}$$
definen a (x,y) como función C^4 de las variables (u,v), para (x,y) cerca de $(1,1)$ y (u,v) cerca de $(2,2)$, y en tal caso:

• Calcular la matriz asociada a la diferencial de la función inversa en $(2,2)$.

• Calcular la ecuación del plano tangente a la función $y = y(u,v)$ en $(2,2)$ en el espacio (u,v,y).

5. • Probar que toda función continua $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, que verifica
$$\lim_{|(x,y)| \to +\infty} f(x,y) = +\infty \ ,$$
tiene necesariamente un mínimo absoluto en $\mathbb{R}$.

• Estudiar los extremos de $f(x,y) = 2x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2$ y señalar cuáles de ellos son extremos absolutos en $\mathbb{R}^2$.

• Calcular los valores extremos de $f(x,y) = x^2 - y^2$ sobre la circunferencia de centro $(0,0)$ y radio 4.

6. • Enunciar y demostrar la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

• ¿Podría haber alguna diferencia al calcular $\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}$ y $\frac{\partial^2 h}{\partial y \partial x}$ en el problema 3? Justificar la respuesta sin calcular las derivadas parciales.