ANÁLISIS DE VARIAS VARIABLES I. Enero 2008

1. Sea

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2\left(e^{x+y}-1\right)}{x^2+y^2} , & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \ , \\ 0 \ , & \text{si } (x,y) = (0,0) \ . \end{cases}$$

• Mostrar que f es C^1 en $\mathbb{R}^2$.
• Estudiar la diferenciabilidad de $\frac{\partial f}{\partial y}$.
• Mostrar que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ en el origen y explicar por qué no contradice el teorema de Young.

2. • Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función C^∞ tal que $f(0) = 1$ y $f'(0) \neq 0$. Mostrar que la ecuación

$$x^2 + y^2 + z^2 = yf(\tfrac{z}{y}),$$

determina a z como función C^∞ de las variables (x, y) cerca de $(0, 1, 0)$.
• Comprobar que $z = z(x, y)$ verifica cerca de $(0, 1)$ la ecuación

$$\left(x^2 - y^2 - z^2\right) \frac{\partial z}{\partial x} + 2xy \frac{\partial z}{\partial y} = 2xz.$$

3. • Hallar las derivadas de primer y segundo orden de h y las de primer orden de f, si

$$h(x,y,z) = \varphi(x^2 + \sqrt[3]{y^3 + z^4}) \quad \text{y} \quad g(x,y) = f(x\sqrt{x^4 + y^3}, (\tfrac{y}{x})^y \sin(xy)).$$

Sugerencia: La derivada de u^α es $\alpha u^{\alpha-1} u'$.

• Calcular el polinomio de Taylor de segundo orden de

$$f(x,y,z) = (x + y + z)^{10}$$

en $(1, 1, 1)$.

4. • Analícese si del sistema

$$(1) \qquad \begin{cases} x = u + uvw, \\ y = v + uv, \\ z = w + u + 3w^2, \end{cases}$$

se pueden despejar u, v y w como funciones C^∞ de (x, y, z) cerca de $(0, 0, 0)$.
• Calcular la ecuación del plano tangente a $w(x, y, z)$ en $(0, 0, 0)$ en el espacio (x, y, z, w) y las derivada parciales $\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x}$, $\frac{\partial^2 v}{\partial^2 x}$, $\frac{\partial^2 w}{\partial^2 x}$ y $\frac{\partial^2 w}{\partial^2 z}$ en $(0, 0, 0)$.

Sugerencia: No despejar las derivadas de u, v y w después de derivar (1). Sólo calcular las ecuaciones que verifican las derivadas y sustituir en las mismas los valores adecuados de x, y, z, u, v y w para obtener el valor de las derivadas parciales que se piden. Lo mismo para calcular las derivadas parciales de segundo orden.

5. • Comprobar que $f(x,y) = (1+e^y)\cos x - ye^y$ tiene infinitos máximos locales y ningún mínimo.

Sugerencia: $\cos k\pi = (-1)^k$, si $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

• ¿Es suficiente para que una función tenga un mínimo local (x_0, y_0) que esta tenga un mínimo restringido a lo largo de cada recta que pasa por (x_0, y_0)? Analizar el ejemplo, $f(x,y) = \left(x - y^2\right)\left(2x - y^2\right)$, en $(0,0)$.

Sugerencia: Estudiar la restricción de f a parábolas.

6. Mostrar que toda función $f : B_R(a) \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ que tiene derivadas parciales continuas en $B_R(a)$ es diferenciable en a.

ANÁLISIS DE VARIAS VARIABLES I. Setiembre 2008

1. Sea
$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{\sin^2(xy)}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & \text{si } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

• Mostrar que f, $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ son continuas en $\mathbb{R}^2$.

• Concluir que f es diferenciable en $\mathbb{R}^2$ y que f está en $C^1(\mathbb{R}^2)$.

• Estudiar la continuidad en $\mathbb{R}^2$ de $\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}$.

2. • Mostrar que la ecuación
$$y=x\varphi(z)+\psi(z).$$
determina a la variable z como función C^∞ de (x,y) cerca de $(0,0,1)$, si φ y ψ son funciones C^∞ en $\mathbb{R}$ tales que $\psi'(1)\neq 0$ y $\psi(1)=0$.

• Mostrar que $z=z(x,y)$ verifica en un entorno de $(0,0)$ la ecuación
$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\frac{\partial^2 z}{\partial^2 x}-2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2 z}{\partial^2 y} \tag{2}$$

Sugerencia: No despejar las derivadas de z en (2). Calcular las derivadas de orden superior en términos de las anteriores de forma implícita.

3. • Hallar la ecuación del plano tangente y del polinomio de Taylor de segundo orden en $(1,1,1)$ de $u(x,y,z)=x^{\frac{y}{z}}$.

• Hallar el plano tangente a la superficie $x^{y^z}=1$ en $(1,1,1)$.

4. • Mostrar que la transformación
$$\begin{cases}u=\log x,\\ v=\log y,\end{cases}$$
es un difeomorfismo C^∞ de $(0,+\infty)\times(0,+\infty)$ en $\mathbb{R}^2$.

• Si f es solución en $(0,+\infty)\times(0,+\infty)$ de la ecuación
$$ax^2\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}+2bxy\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+cy^2\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}=0,\quad a,b \text{ y } c \text{ constantes}$$
y $g(u,v)=f(x,y)$, calcular la ecuación que verifica g en $\mathbb{R}^2$ en las coordenadas (u,v).

5. • Hallar el supremo y el ínfimo de la función
$$u=xyze^{-(x+2y+3z)}$$
en la región $K=\{x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0\}$.

Sugerencia: Como $\lim_{x\to+\infty} xe^{-ax}=0$, si $a>0$, u tiende a cero si (x,y,z) tiende hacia ∞ en K y está acotada superiormente en K.

• Estudiar los extremos condicionados de $f(x,y)=xy$, si $x^2+y^2=1$.

6. Mostrar que toda función $f: B_R(a)\subset\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ que tiene derivadas parciales continuas en $B_R(a)$ es diferenciable en a.