ANÁLISIS DE VARIAS VARIABLES I. Enero 2009

1. Sea

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{e^{xy}-1}{\sqrt{x^2+y^2}} \ , & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \ , \\ 0 \ , & \text{si } (x,y) = (0,0) \ . \end{cases}$$

• Mostrar que f es continua en $\mathbb{R}^2$.
• Estudiar si f es diferenciable en $(0,0)$.
• Mostrar que a la función

$$h(x,y) = \frac{e^{x+y}-1}{x+y}, \quad \text{si } x+y \neq 0$$

se le puede asignar un valor sobre la recta $x+y=0$ de forma que la función resultante sea C^∞ en $\mathbb{R}^2$.

Sugerencia: Utilizar la regla de la cadena en la última pregunta del ejercicio 1

2. • Dar la fórmula del plano tangente a la gráfica de una función $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ en (a,b,c).

• Escribe la fórmula del polinomio de Taylor $P_3(x,y)$ de orden 3 centrado en (a,b) de una función $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ y aplicarla para calcular el correspondiente polinomio para $f(x,y) = e^{x+2y}$ en $(1,1)$.

Aviso: No desarrollar, multiplicar o simplificar los cuadrados, factoriales, potencias cúbicas y similares que encontréis.

•¿Qué sabes del tamaño del término de error en el caso anterior?
• Hallar la ecuación del plano tangente en $(0,2,1)$ a la superficie

$$\cos(x(y-2)) - \sin(y(z-1)) - 1 = 0.$$

• ¿Por qué puedo asegurar que

$$\{(x,y,z) : \cos(x(y-2)) - \sin(y(z-1)) - 1 = 0\}$$

es una superficie o tiene el aspecto de una superficie cerca de $(0,2,1)$?

3. • Mostrar que el sistema

$$\begin{cases} x^2z^2 + y^3u + 2x = 1, \\ yzu + xu + 2yz = 0, \end{cases}$$

define a (z,u) como función implícita de (x,y) en un entorno de $(0,1,0,1)$.

• Si denotamos dicha función por $(z,u) = \varphi(x,y)$, mostrar que φ admite una inversa local entre un entorno $(0,1)$ y otro entorno de $(0,1)$.

4. • Mostrar que $(1,1)$ es un punto de silla de $f(x,y) = (x-1)(y-1)$.

• Mostrar que $f(x,y) = \frac{1}{1+x^2+y^2}$ tiene un máximo absoluto en $\mathbb{R}^2$ y que el $\inf_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f$ no es un mínimo absoluto.

ANÁLISIS DE VARIAS VARIABLES I. Setiembre 2009

1. • Calcular la ecuación del plano tangente en $(1, \frac{1}{2})$ para la función

$$u(x,y) = \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right).$$

• Mostrar que

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3y^2}{x^2+y^2} , & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 , & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

es continua y diferenciable en $(0,0)$.

• Utilizando la regla de la cadena concluir que

$$f(x,y,z) = \begin{cases} \frac{\sin\left(x^2+y^2+z^2\right)}{x^2+y^2+z^2} , & \text{si } (x,y,z) \neq (0,0,0), \\ 1 , & \text{si } (x,y,z) = (0,0,0). \end{cases}$$

es C^∞ en $\mathbb{R}^3$.

2. Sea la ecuación $x^2 - y^4 + 2z^6 = 2$.

• Mostrar que existe un entorno de $(0,0)$ donde podemos encontrar una función regular $z = f(x,y)$ que verifica la ecuación anterior y $f(0,0) = 1$.

• Calcular el polinomio de Taylor de orden 2 de f en $(0,0)$.

• Ecuación del plano tangente a la superficie $x^2 - y^4 + 2z^6 = 2$ en $(1,1,1)$.

3. • Supongamos que la función $u = u(x,y)$ satisface la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \text{ en } \mathbb{R}^2$$

y las condiciones

$$u(x,2x) = x \text{ y } \frac{\partial u}{\partial x}(x,2x) = x^2, \text{ si } x \in \mathbb{R}.$$

Hallar las derivadas parciales segundas de u en $(x,2x)$, $x \in \mathbb{R}$.

• Clasificar los posibles extremos locales de las funciones

$$z = (x-y+1)^2 \ , \ z = x^3 + y^3 - 3xy.$$

• ¿Son extremos absolutos en $\mathbb{R}^2$?

• Calcular los extremos absolutos de $f(x,y) = x^3 + y^3$ restringidos a la circunferencia unidad.

4. Las variables x, y, u y v están relacionas por las fórmulas

$$\begin{cases} x = u + v^2, \\ y = u^2 - v^3. \end{cases}$$

• Mostrar que la transformación es un difeomorfismo C^∞ entre entornos de $(u,v) = (2,1)$ y $(x,y) = (3,3)$.

• Si $z = 2uv$, calcular $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ en $(x,y) = (3,3)$.

5. Sean $f \in C^{k+1}(\Omega)$, $a \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ y $k \geq 1$. Escribe sin demostraciones lo que sepas sobre el desarrollo de Taylor de orden k de f en $x = a$.