ANÁLISIS DE VARIAS VARIABLES I. Enero 2010

1. • Sea

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

• Si $(x,y) \neq (0,0)$, calcular $\partial f/\partial x$ ¿Puedes usar simetrías para simplificar el cálculo de $\partial f/\partial y$?

• Mostrar que $(\partial f/\partial x)(0,0) = (\partial f/\partial y)(0,0) = 0$ y que f es de clase C^1 en $\mathbb{R}^2$.

• Probar que $(\partial^2 f/\partial x \partial y)(0,0) = 1$ y $(\partial^2 f/\partial y \partial x)(0,0) = -1$.

• ¿Qué sucede? ¿Por qué no son iguales las parciales mixtas?

• Mostrar utilizando la regla de la cadena que

$$f(x,y) = \frac{\sin(xy)}{y}\ ,\ y \neq 0,$$

puede ser definida sobre la recta $y = 0$ de forma que sea C^∞ en $\mathbb{R}^2$.

Sugerencia: usar la regla de la cadena.

2. • Mostrar que la ecuación $x^2 + y^2 - e^y = 0$ define implicitamente a y en un entorno de $(1,0)$ y calcular el desarrollo de Taylor de orden **tres** de y alrededor de $x = 1$.

• Mostrar que cerca del punto $(x,y,u,v) = (4,3,2,1)$ podemos resolver

$$\begin{cases} xu + yu^2 v = 20, \\ xu^3 + 2y^2 v^4 = 50, \end{cases}$$

para u y v como funciones de x e y. Calcular $(\partial u/\partial x)(4,3)$ y $(\partial v/\partial y)(4,3)$.

3. • Calcular la diferencial de $f(x,y,z) = x^{y^{z^2}}$.

Sugerencia: si $g = \log|\log f|$, $\nabla g = \frac{\nabla f}{f \log f}$.

• Si

$$f(u,v,w) = (u-v, u+v+w),$$
$$g(x,y) = (e^x, \cos(x-y), e^{-y}),$$

calcular $f \circ g$ y verificar la regla de la cadena para $f \circ g$.

• Hallar la ecuación del plano tangente a $xyz = 6$ en $(1,2,3)$.

4. • Estudiar los extremos locales de

$$f(x,y) = x^3 - 3xy^2 + x^2 - y^2.$$

5. • Enunciar y probar el teorema de inyectividad local.

ANÁLISIS DE VARIAS VARIABLES I. Setiembre 2010

1. • Sea

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{(x^3-y^3)\sin x}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

• Estudiar la continuidad y existencia de las derivadas parciales de f.
• Mostrar que f es de clase C^1 en $\mathbb{R}^2$.
• ¿Es $\partial f/\partial y$ diferenciable en $(0,0)$?

2. • Sean $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ y $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ las funciones

$$f(x,y,z) = (\sin(xy+z)\ ,\ (1+x^2)^{yz})\ ,\ g(u,v) = (u+e^v\ ,\ v-e^u).$$

• Probar que f es diferenciable en $(1,-1,1)$.
• Probar que g es diferenciable en $(0,1/2)$.
• Mostrar que $h = g \circ f$ es diferenciable en $(1,-1,1)$ y calcular la diferencial de h en $(1,-1,1)$.

Sugerencia: No calculéis h y utilizar la regla de la cadena.

3. • Mostrar que el sistema de ecuaciones

$$x = \frac{u^2-v^2}{\sqrt{u^2+v^2}}\ , \quad y = \frac{2uv}{\sqrt{u^2+v^2}},$$

define un difeomorfismo entre entornos de $(0,1)$ y $(-1,0)$.
• Calcular la diferencial de la inversa local, $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$, en $(-1,0)$.
• Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie $v = v(x,y)$ en $(-1,0)$ en el plano (x,y,v).

4. • Mostrar que la ecuación

$$x^2 + y^3 + xy + x^3 - y = 0$$

define a y como función de x en un entorno de $(0,0)$.
• Si $y = \varphi(x)$ es la función implícita, calcular el polinomio de Taylor de orden 2 de φ en $x = 0$.
• ¿Es $x = 0$ un mínimo local de φ?

5. • Enunciar y demostrar una condición suficiente para que una función de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$ y de clase C^∞ tenga un punto silla en uno de sus puntos críticos.