Análisis de Varias Variables II. Junio 1999

1. Calcular la integral de la función $f(x,y) = ye^{-\frac{xy}{a^2}}$ sobre la región limitada por las curvas $xy = a^2$, $xy = 2a^2$, $y = m$ y $y = n$, donde $a > 0$ y $0 < m < n$.

2. Sea W la región limitada por las superficies $y^2+z^2 = 4$, $x+y = 2$, $x+2y = 6$, $y = 0$ y $z = 0$.

(a) Plantear su volumen utilizando los ordenes de integración siguientes:

$$\int_W dzdxdy \qquad \int_W dxdydz \qquad \int_W dydxdz$$

(b) Calcular el volumen de W utilizando una de las fórmulas anteriores.

3. Aplicando la fórmula de Green, calcular en cuánto se diferencian entre sí las integrales curvilineas

$$I_1 = \int_{AmB} (x+y)^2dx - (x-y)^2dy \quad , \quad I_2 = \int_{AnB} (x+y)^2dx - (x-y)^2dy$$

donde AmB es el segmento rectilineo que une los puntos $A = (1,1)$ y $B = (2,6)$, y AnB es el árco de parábola con eje vertical que une el origen de coordenadas con A y B.

4. Sea F el campo vectorial $F(x,y,z) = (2y+z)i + (x+y)j + yk$.

(a) Calcular directamente y aplicando el teorema de Stokes

$$\int_C F \cdot ds$$

donde C es la curva interseción de las superficies $x^2+(y-1)^2 = z$ y $2y+z = 2$.

(b) Utilizando el campo vectorial F y el teorema de la divergencia (Gauss) calcular el volumen del sólido que limitan las superficies $x^2+(y-1)^2 = z$ y $2y+z = 2$.

Teoría.

(a) Probar razonadamente que la función

$$f(x) = sgn\left(\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)\right)$$

es integrable en $[0,1]$. Calcular la integral de f en $[0,1]$ dejando la respuesta como la suma de una serie alternada (no es necesario calcular el valor).

(b) Sea $F(x,y) = P(x,y)i + Q(x,y)$ un campo vectorial de clase C^1 en el plano tal que $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ para todo (x,y). Probar que existe una función $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ tal que $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = P(x,y)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = Q(x,y)$. Dar una fórmula explícita para f en términos de F y probar todo lo que se pide.