Análisis de Varias Variables I
Septiembre 1999

1. Dada la función

$$f(x,y)=\begin{cases} xy^n \sin\left(\dfrac{1}{y}\right) & \text{si} \quad y\neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad y=0 \end{cases}$$

Estudiar para que valores de $n=0,1,2\cdots$, la función es continua y diferenciable en $(0,0)$ y en $(a,0)$ para $a\neq 0$. Determinar también aquellos valores de n para los que $f\in C^1(\mathbb{R}^2)$.

2. Sean las funciones $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^3$, $f(x,y)=(e^{x+y},x-y,x^2)$ y $g:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^2$ definida por $g(u,v,w)=(u^w,\sin(v+w))$.

(i) Probar que f es diferenciable en $(0,0)$.
(ii) Probar que g es diferenciable en $(1,0,0)$.
(ii) Probar que $h=g\circ f$ es diferenciable en $(0,0)$ y calcular $Dh(0,0)$.

3. Probar que la ecuación

$$2z^2+xyz-xy^2-x^3=0$$

define una función implícita $z=f(x,y)$ de clase C^∞ en un entorno del punto

$$(-12,12\sqrt{3},24\sqrt{3}),$$

y comprobar que $(-12,12\sqrt{3})$ es un punto crítico de f. ¿Se trata de un máximo o mínimo local de f?.

Teoría

Definición de continuidad y diferenciabilidad de una función en un punto. Demostrar la relación entre ambos conceptos.