Temas para el curso 0 de matemáticas, 2004-05.

1. Números enteros y factores primos.
2. Matrices y determinantes (2×2 y 3×3).
3. Sistemas de ecuaciones lineales (2×2 y 3×3).
4. Coordenadas cartesianas en dos y tres dimensiones. Distancias.
5. La ecuación $ax^2 + bx + c = 0$.
6. Polinomios: raices y factorización.
7. Geometría analítica en dos dimensiones: rectas y sus ecuaciones; posiciones relativas de rectas; escribir rectas por dos puntos y punto-pendiente. Ecuación de la circunferencia.
8. Áreas de figuras elementales. Semejanza de triángulos y otras figuras. Trigonometría.
9. Inecuaciones.
10. Funciones elementales y sus gráficas. Composición de funciones.
11. Continuidad, derivadas e integrales de funciones elementales.
12. Factorial y números combinatorios. Binomio de Newton.

Día	**Temas**	**Fecha**
1		5
2		6
3		7
4		8
5		9
6		12
7		13
8		14
9		15
10		16
11		19
12		20
13		21
14		22
15		23

8. Áreas de figuras elementales, semejanzas y Trigonometría.

Notas de Descartes.

Mathematics 1 Japanese Grade 10. Kunihiko Kodaira, Editor. AMS, The University of Chicago School Mathematics Project. Páginas 211–237.

Basic Analysis, Japanese Grade 11. Kunihiko Kodaira, Editor. AMS, The University of Chicago School Mathematics Project. Páginas 29–63.

• Medición de ángulos, lado inicial y final, dirección positiva y negativa.

1. Dibujar el lado final de los ángulos de 290°, 800° y $-585°$.

2. ¿Qué rotación del lado final de un ángulo α produce el lado final del ángulo $\alpha - \beta$?

• Los ángulos asociados al lado final OP de α son $\alpha + n \cdot 360°$, $n \in \mathbb{Z}$.

3. Calcular $2° \, 48' \, 35'' + 2° \, 45' \, 30''$, $3° \, 0' \, 0'' - 2° \, 48' \, 35''$, $18° \, 26' \, 35'' \times 3$ y $66° \, 45' \, 36''/4$.

4. Calcular los ángulos complementarios y suplementarios de $56° \, 20' \, 40''$ y de $33° \, 33' \, 33''$.

• Rectas paralelas determinan ángulos iguales (Uno de los axiomas de Euclides).
• Rectas perpendiculares determinan ángulos iguales.
• Suma de los ángulos de un triángulo. Triángulo rectángulo, isósceles y equilátero.

5. Un triángulo $\widehat{ABC}$ está inscrito en una circunferencia y uno de sus lados es un diámetro. Mostrar que el ángulo opuesto al diámetro es de 90°.

• Área de un rectángulo (cuadrilátero con los cuatro ángulos iguales) y de un paralelogramo (cuadrilátero con lados opuestos paralelos dos a dos) = base × altura.
• Área de un triángulo =(base × altura) /2.
• Los cuadriláteros: área de rombo en términos de las longitudes de sus diagonales y área de un trapecio.
• **Teorema de Pitágoras**: $a^2 = b^2 + c^2$.

6. Tres segmentos de medidas $a = 5$cm, $b = 7$cm, $c = 10$cm y d, de tamaño desconocido, son proporcionales. Halla la razón de proporcionalidad y el valor del segmento desconocido.

• **Teorema de Tales**: Toda paralela a un lado de un triángulo que corta a los otros dos, determina sobre éstos segmentos proporcionales.
• **Semejanza de polígonos**: Dos polígonos son semejantes cuando tienen los ángulos iguales y sus lados son proporcionales.

7. Mostrar que dos triángulos rectángulos que sustentan un mismo ángulo son semejantes (Teoremas de Tales y Pitágoras).

• Definición de $\sin\theta$, $\cos\theta$ y $\tan\theta$ si $0 \leq \theta \leq 90°$ en términos de lado contiguo, opuesto ... $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$, $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$.

8. Encontrar el valor de las funciones trigonométricas de 60° y 30° utilizando un triángulo equilátero . Lo mismo para 45° y con un triángulo isósceles.

9. En un triángulo rectángulo los catetos miden 4,2 y 6,7 cm. Hallar los ángulos del triángulo con la calculadora. Dar la respuesta en grados.

10. Verificar sobre un triángulo rectángulo que $\sin\theta = \cos(90° - \theta)$ y $\cos\theta = \sin(90° - \theta)$ si $0 \leq \theta \leq 90°$.

• Mostrar que $\sin\theta = y/r, \cos\theta = x/r \ldots$ si $0 \leq \theta \leq 90°$ y extender las definiciones de las funciones trigonométricas a ángulos obtusos.

11. Hallar el seno, coseno y tangente de 135° dibujando un círculo de radio 2 centrado en el origen. ¿Cuáles son las coordenadas de un punto P sobre la circunferencia de radio 1 si tiene asociado un ángulo de 120°?

12. Verificar sobre una circunferencia de radio 1 y utilizando la simetría respecto al eje OY que $\sin(180° - \theta) = \sin\theta$, $\cos(180° - \theta) = -\cos\theta$ y $\tan(180° - \theta) = -\tan\theta$ si $0 \leq \theta \leq 180°$. Hallar $\cos 145°$.

13. Encontrar un ángulo α que verifique: $0 \leq \alpha \leq 180°$, $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ y $\tan\alpha = -\sqrt{3}$.

14. Mostar que en un triángulo ABC se verifica:

1. Área$(ABC) = \frac{ab}{2}\sin(C)$.
2. Ley de los senos: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$.
3. Ley de los cosenos: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$, $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$ y $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$.

(*Sugerencia:* Para 2, comparar distintas fórmulas del área del triángulo. Para la primera fórmula en 3, si $A = (0,0)$ y $C = (b,0)$, escribe las coordenadas de B y calcula con el Teorema de Pitágoras, el cuadrado de la distancia de B a C).

15. Mostrar que dos triángulos que tienen los ángulos iguales son semejantes ¿Son semejantes si tienen lados proporcionales?

16. Mostrar que $a^2 < b^2 + c^2$ si A es agudo y que $a^2 > b^2 + c^2$ si A es obtuso.

17. En un triángulo de lados $AB = 10$ cm, $AC = 12$ cm y $BC = 8$ cm se traza una paralela al lado BC a una distancia de 4 cm del vértice A, tomados sobre el lado AB, y que corta a los lados en D y E. Calcula las medidas de AE y DE.

• Polígonos regulares, circunferencia circunscrita, ángulo central y apotema.

18. Mostrar que en un polígono regular de n lados, la suma de los ángulos interiores es $180°(n-2)$, que cada uno de los ángulos interiores es igual a $180°(n-2)/n$ y que la suma de los ángulos exteriores (suplemantarios de los interiores) es $360°$.

• Área de un polígono regular = (perímetro × apotema)/2.
• Con la intuición, convencerse de la veracidad de las siguientes afirmaciones y responder a las preguntas:

19. Calcular el ángulo central, apotema $a_n(R)$, lado $l_n(R)$, perímetro $p_n(R)$ y área $A_n(R)$ de un polígono regular con n lados y radio R.

• 2π radianes $= 360°$, $180° = \pi$ radianes.
• La medida en radianes de un ángulo, es la razón entre la longitud del arco que determina dicho ángulo sobre una circunferencia de radio R y el radio R.

20. Hallar la longitud del arco sobre las circunferencias de radios 1 y 3 asociada a los ángulos centrales de medidas $30°$, $45°$, $60°$ y $90°$.

21. En un triángulo rectángulo los catetos miden 4,2 y 6,7 cm. Hallar los ángulos del triángulo en radianes usando la calculadora.

22. Hallar la medida en el sistema sexagesimal de los ángulos $\frac{\pi}{5}$, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{3\pi}{2}$ y 3π.

• Los ángulos medidos en radianes y asociados a lado final OP son $\alpha + 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, donde α es cualquier ángulo asociado a OP y medido en radianes.
• Definición de seno, coseno y tangente por $\sin\theta = y/r \ldots$y para cualquier $\theta \in \mathbb{R}$. Éstas coinciden con las anteriores si el ángulo es obtuso. Representación geométrica de $(\cos\theta, \sin\theta)$ y $(1, \tan\theta)$. Signo de las funciones trigonométricas por cuadrante. **"All students take calculus"**.

23. Mostrar que $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ y $-1 \leq \sin\theta \leq 1$ si $\theta \in \mathbb{R}$.

24. Encontrar los valores de $\cos(-60°)$, $\sin(-135°)$, $\tan 870°$, $\sin(\frac{4\pi}{3})$, $\tan(-\frac{5\pi}{4})$ y $\cos(-\frac{7\pi}{2})$.

25. Encontrar los valores de $\cos\theta$ y $\tan\theta$, si $\sin\theta = -\frac{3}{5}$ y θ está en el tercer cuadrante.

• $\sin(\theta + 2n\pi) = \sin\theta$, $\cos(\theta + 2n\pi) = \cos\theta$ y $\tan(\theta + 2n\pi) = \tan\theta$.

26. Calcular los valores de $\sin 6\pi$, $\sin\left(\frac{11\pi}{3}\right)$, $\cos\left(-\frac{23\pi}{6}\right)$ y $\tan\left(-\frac{27\pi}{4}\right)$.

• θ y $-\theta$ corresponden a lados OP que son simétricos respecto al eje OX: $\sin(-\theta) = -\sin\theta$, $\cos(-\theta) = \cos\theta$, $\tan(-\theta) = -\tan(\theta)$.

27. Calcular $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ y $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$.

• θ y $\pi-\theta$ corresponden a lados OP que son simétricos respecto al eje OY: $\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$, $\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$ y $\tan(\pi-\theta)=-\tan\theta$.

28. Hallar los valores de $\sin\left(\frac{29\pi}{6}\right)$ y $\cos\left(-\frac{20\pi}{3}\right)$

29. Encontrar el seno, coseno y tangente de $\frac{17\pi}{6}$, $-\frac{14\pi}{3}$ y $\frac{15\pi}{4}$.

30. Encontrar todos los valores de θ tal que $\sin\theta=\frac{1}{2}$.

31. Encontrar los valores de θ, tal que $\cos\theta>\frac{\sqrt{3}}{2}$.

32. Mostrar que $\sin(\theta+\pi)=-\sin\theta$, $\cos(\theta+\pi)=-\cos\theta$ y $\tan(\theta+\pi)=\tan\theta$.

• Gráficas de seno, coseno, tangente ...

33. Encontrar los valores de θ, tal que $\tan\theta=\sqrt{3}$.

• La distancia entre los puntos $A=(\cos\alpha,\sin\alpha)$ y $B=(\cos\beta,\sin\beta)$ es igual a la distancia del punto $C=(\cos(\alpha-\beta),\sin(\alpha-\beta))$ al $(1,0)$. Esto implica la fórmula para $\cos(\alpha-\beta)$. La paridad, implica la fórmula para $\cos(\alpha+\beta)$. Del coseno de la diferencia salen las fórmulas $\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\sin\alpha$ y $\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\cos\alpha$. Finalmente, las últimas fórmulas y el desarrollo del $\cos\left((\frac{\pi}{2}-\alpha)-\beta\right)$ dan $\sin(\alpha+\beta)$ ...

34. Utilizar que $105°=60°+45°$ para calcular $\sin 105°$.

35. Hallar $\sin(\alpha+\beta)$, si $\sin\alpha=\frac{4}{5}$, $\cos\beta=-\frac{8}{17}$, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ y $\frac{\pi}{2}<\beta<\pi$.

36. Mostrar que

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta} \quad \text{y} \quad \tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\ .$$

37. Calcular las tangentes de $15°$, $75°$ y $105°$ a partir de las tangentes de $30°$, $45°$ y $60°$.

• Fórmulas del seno, coseno y tangente del ángulo doble.

38. Calcular $\sin 2\alpha$ y $\cos 2\alpha$, si $\cos\alpha=-\frac{4}{5}$ y $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.

39. Mostrar que $\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$.

40. Mostrar que $\sin 2x+\sin 2y=2\sin(x+y)\cos(x-y)$.

41. Las coordenadas de P son $(3,2)$. Si α es un ángulo asociado a P, mostrar que

$$3\sin\theta+2\cos\theta=\sqrt{13}\sin(\theta+\alpha)\ .$$

9. Inecuaciones

Calculus, Salas Hille. Reverté, S.A. Página fotocopiada 26–27.

10. Funciones elementales y sus gráficas. Composición de funciones.

Basic Analysis, Japanese Grade 11. Kunihiko Kodaira, Editor. AMS, The University of Chicago School Mathematics Project. Páginas 1–27.

• Cálculo de funciones compuestas. Ejercicios páginas 43–45 en Salas Hille.
• Cálculo de funciones inversas. Ejercicios páginas 51–52 en Salas Hille.
• La función $y = x^n$, n par o impar, $n \in \mathbb{N}$. $a^n a^m = a^{n+m}$, $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, $\frac{a^n}{b^m} = a^{n-m}$, $(ab)^n = a^n b^n$, $(a^n)^m = a^{nm}$, $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$, $a^0 = 1$ si $a > 0$. Gráficas. Composición de funciones, función inversa.
• La función $y = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$, n par o impar, $n \in \mathbb{N}$. Gráficas.

1. Hallar: $\sqrt[4]{16}$, $\sqrt[4]{-16}$, $\sqrt[3]{27}$ y $\sqrt[3]{-27}$.

• $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$ y $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$.

2. Simplificar: $\sqrt[4]{3}\sqrt[4]{27}$ y $\sqrt[3]{200} + \sqrt[3]{25}$.

3. Simplificar: $\sqrt[3]{54}$, $\sqrt[4]{48}$ y $\sqrt[3]{500}$.

• Si $a > 0$, $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$.

4. Simplificar: $\left(\sqrt[4]{25}\right)^6$ y $\sqrt[3]{27^4}$.

• Monotonía de estas funciones.
• Definición a^r, $r \in \mathbb{Q}$, $r = \frac{m}{n}$, $a > 0$: $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$

5. Escribir las expresiones $\sqrt[4]{a}$, $(\sqrt{a})^3$, $\sqrt[3]{a^5}$ y $\sqrt[3]{\frac{1}{a^2}}$ en la forma a^r.

6. Escribir las expresiones $a^{\frac{1}{2}}$, $a^{\frac{4}{3}}$, $a^{-\frac{5}{3}}$ y $a^{1,5}$ en la forma $\sqrt[n]{a^m}$.

7. Calcular $a^{\frac{4}{3}}a^{\frac{1}{2}}$, $\left(a^{\frac{2}{3}}a^{-1}\right)^{-3}$ y $\left(a^{-\frac{3}{4}}\right)^{-\frac{2}{3}} / \sqrt{a^3}$.

8. Mostrar que $a^{\frac{1}{3}} < a^{\frac{1}{2}}$ si $a > 1$. Compara los valores de $a^{-\frac{1}{3}}$ y $a^{-\frac{1}{2}}$ si $a > 1$.

9. Mostrar que $a^{1,5} < a^2$ si $0 < a < 1$.

• Definición de a^x, $x \in \mathbb{R}$ y $a > 0$ por paso al límite. $\sqrt{2} = 1,4142\ldots$, los valores de a, $a^{1,4}$, $a^{1,41}$, $a^{1,414}$, $a^{1,4142}\ldots$ aproximan a un cierto valor que se denota a^x. Las propiedades de la exponenciación son ciertas para números racionales y se muestra que las propiedades son también ciertas para cualesquiera números reales m y n ...Si $a > 1$ y $x < y$, entonces $a^x < a^y$. Si $0 < a < 1$ y $x < y$, entonces $a^x > a^y$. Gráfica de la función exponencial de base $a > 0$.

10. Simplificar $\frac{2^{3x}+2^{-3x}}{2^x+2^{-x}}$, si $2^x = 5$.

• La función logaritmo de base $a > 0$ como inversa de la exponencial $y = a^x$. $a^y = x$ si y sólo si $y = \log_a x$. Gráfica.

11. Escribir las siguientes identidades en la forma $a^y = x$: $\log_4 8 = \frac{3}{2}$, $\log_{64} \frac{1}{8} = -\frac{1}{2}$, $\log_{10} 1 = 0$.

12. Hallar los valores de $\log_3 27$, $\log_2 \sqrt{2}$, $\log_7 1$, $\log_5 5$, $\log_{10} \sqrt[3]{0,01}$, $\log_{\sqrt{3}} (3^{-1})$.

• $\log_a 1 = 0$ y $\log_a a = 1$. Logaritmo del producto, cociente y de la potencia.

13. Simplificar las expresiones: $\log_6 \frac{9}{2} + \log_6 8$, $\log_5 250 - \log_5 2$, $\frac{1}{2} \log_2 25 - \log_2 10$.

14. Hallar el rango de los valores de $\log_{10} x$ cuando x varía en alguno de los siguientes conjuntos: $10 < x < 100$, $0,01 < x < 1$, $0,001 \leq x \leq 1,000$ o $10^n \leq x < 10^{n+1}$.

15. Si $\log_{10} 2 = 0,3010$, ¿cuántos dígitos tiene 2^{30}? ¿En qué posición aparece el primer decimal no nulo en $\left(\frac{1}{4}\right)^{20}$?

16. Resolver las ecuaciones: $2^{1-x^2} = \frac{1}{8}$, $4^{x+1} + 2^{x+3} = 320$, $5^x + 5^{x+2} + 5^{x+1} = 651$, $4^{3x} = 8^x + 6$.

17. Resolver el sistema: $2^x + 2^y = 24$, $2^x 2^y = 128$.

18. Simplificar: $\left(a^{\frac{1}{3}} - a^{-\frac{1}{3}}\right)\left(a^{\frac{2}{3}} + 1 + a^{-\frac{2}{3}}\right)$, $(x^a)^{b-c}(x^b)^{c-a}(x^c)^{a-b}$.

• Las inversas de las funciones trigonométricas y sus gráficas.

11. Continuidad, derivadas e integrales de funciones elementales

Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales II. Carlos González García, Jesús Llorente Medrano, María José Ruiz Jiménez, Editex. Páginas fotocopiadas de problemas: 125, 145–147. 165, 191, 208–209 y 231.

12. Factorial y números combinatorios. Binomio de Newton

• Número de modos de ordenar los 5 primeros corredores en la llegada (n corredores, permutaciones de n elementos $= n!$).
• Número de modos de ordenar los 5 primeros corredores en la llegada de 13 participantes (Variaciones de m elementos tomados de n en n $= m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)$).
• Corren 13 y se clasifican los 5 primeros independientemente del orden: número de resultados posibles (Combinaciones de m elementos tomados de n en $n = \frac{m!}{n!(m-n)!}$).
• Triángulo de Pascal o de Tartaglia.
• Desarrollar $(a+b)^2$ y $(a+b)^3$.
• Binomio de Newton: explicar por qué el coeficiente de $a^{n-k}b^k$ es $\binom{n}{k}$.