ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES. 5^o DE MATEMATICAS

Examen final. Convocatoria de febrero de 2001

1. Escribir la solución del problema

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & 0 < x < 1, t > 0\,, \\ u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0, & t > 0\,, \\ u(x,0) = \begin{cases} x, & \text{si} \quad 0 \le x \le 1/2\,, \\ 1-x, & \text{si} \quad 1/2 \le x \le 1\,. \end{cases} \end{cases}$$

¿Cuánto vale $\lim_{t\to\infty} u(x,t)$?

2. Determinar la solución del problema

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & x > 0, t > 0\,, \\ u(0,t) = h(t), & t > 0\,, \\ u(x,0) = 0, & x > 0\,, \\ u_t(x,0) = g(x), & x > 0\,, \end{cases}$$

donde

$$h(t) = \begin{cases} \sin 2t & \text{si } 0 < t < 2\pi \\ 0 & \text{si } t \ge 2\pi \end{cases} \quad \text{y} \quad g(x) = \begin{cases} 2\sin x & \text{si } 0 < x < 2\pi \\ 0 & \text{si } x \ge 2\pi\,. \end{cases}$$

Determinar los puntos de discontinuidad de $u_t(x,t)$.

3. Sea D el círculo unidad del plano. Utilizando separación de variables, escribir la solución del problema

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{en } D \\ u_r(1,\theta) = \sin^3\theta & \text{en } \partial D\,. \end{cases}$$

¿Qué ocurre si el valor en el borde es $\sin^2\theta$?.

4. Sea D el exterior de la bola unidad de $\mathbf{R}^3$.

(a) Probar que si $u \in \mathcal{C}^2(\overline{D})$, $\Delta u > 0$ en D y $\lim_{|x|\to\infty} u(x) = 0$, se tiene

$$\sup_{x\in D} u(x) = \max(0, \max_{x\in\partial D} u(x))\,.$$

(b) Dar una función que cumpla las condiciones de (a) y tal que $\max_{x\in\partial D} u(x) < 0$. (Sugerencia: Calcular $\Delta(|x|^{-\alpha})$.)

(c) Probar (a) con la hipótesis $\Delta u = 0$.

Problemas 1 y 2: 3 puntos. Problema 3: 2,5 puntos. Problema 4: 1,5 puntos.

ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES. 5^o DE MATEMATICAS

Examen final. Convocatoria de setiembre de 2001

1. Determinar para $0 < t < 2$ la solución del problema

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & 0 < x < 2, t > 0\,, \\ u(0,t) = t, u(2,t) = 0, & t > 0\,, \\ u(x,0) = 0, & 0 < x < 2\,, \\ u_t(x,0) = 1 - 2x, & 0 < x < 2\,. \end{cases}$$

Estudiar la continuidad de $u(x,t)$ y $u_x(x,t)$ para $t = 1$.

2. Determinar la solución del problema

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = e^x, & 0 < x < 1, t > 0\,, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & t > 0\,, \\ u(x,0) = 0, & 0 < x < 1\,. \end{cases}$$

(Si se necesitan, se pueden utilizar sin hacer los cálculos las siguientes primitivas:

$$\int e^{ax} \sin bx\, dx = \frac{e^{ax}(a \sin bx - b \cos bx)}{a^2 + b^2}\,,)$$

3. Sea D el anillo $\{(x,y) : 1 < x^2 + y^2 < 4\} = \{(r,\theta) : 1 < r < 2\}$ del plano. Determinar la solución del problema

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & (x,y) \in D\,, \\ u(1,\theta) = \cos 2\theta, & 0 \le \theta < 2\pi\,, \\ \dfrac{\partial u}{\partial r}(2,\theta) = \sin\theta, & 0 \le \theta < 2\pi\,. \end{cases}$$

Calcular el máximo y el mínimo en $\overline{D}$ de la solución.