ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES. Curso 01-02.
Examen final. Convocatoria ordinaria. 25 de enero de 2002.

1. Utilizar el método de separación de variables para resolver el problema:

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & 0 < x < 1,\ t > 0, \\ u_x(0,t) = u(1,t) = 0, & t > 0, \\ u(x,0) = 1 - x^2, & 0 < x < 1\,. \end{cases}$$

Calcular razonadamente el límite cuando t tiende a 0 y a infinito de la solución obtenida.

2. Sea D el semicírculo del plano centrado en el origen y de radio 1. Su frontera la escribimos como $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$, donde Γ_1 es el diámetro del círculo y Γ_2 la semicircunferencia. Resolver el problema siguiente:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{en } D\,, \\ u = 0 & \text{en } \Gamma_1\,, \\ u_r(1,\theta) = \sin^3\theta, & \text{en } \Gamma_2\ (0 < \theta < \pi)\,. \end{cases}$$

Escribir la solución (también) en coordenadas cartesianas y comprobar que es una función armónica.

3. Determinar la solución del problema

$$\begin{cases} u_{tt} - 4u_{xx} = 0, & x > 0,\ t > 0\,, \\ u_x(0,t) = At + B, & t > 0\,, \\ u(x,0) = 0, & x > 0\,, \\ u_t(x,0) = 0, & x > 0\,. \end{cases}$$

Hacer que u sea continua y dar condiciones sobre las constantes A y B para que u_t y u_x también sean continuas. ¿Puede ser u de clase $\mathcal{C}^2$?

4. Sea D un dominio acotado de $\mathbf{R}^n$ en el que vale la fórmula de Green. Supongamos que $u(x,t)$ es regular y satisface

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0\,, & x \in D,\ t > 0\,, \\ u(x,t) = 0, & x \in \partial D,\ t > 0\,. \end{cases}$$

Probar que

$$\frac{d}{dt}\int_D u(x,t)^2\,dx$$

es negativa. Deducir que si $u(x,0) = 0$ para $x \in D$, entonces $u(x,t) = 0$ para todo $t > 0$ y $x \in D$. Enunciar a partir de este resultado un teorema de unicidad para la ecuación del calor.

Para quien le sobre tiempo y quiera sacar más nota:

Problema 2. Comprobar que no hay extremos en el interior del dominio. Calcular el máximo y el mínimo de la solución en $\overline{D}$.

Problema 3. Tomar $A = 1$. ¿En qué condiciones sobre B tiene la solución un máximo estrictamente positivo para cada t? Dibujar en el plano (x,t) la trayectoria que sigue este máximo.

ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES. Curso 01-02.
Examen final. Convocatoria extraordinaria. 9 de setiembre de 2002.

1. Determinar la solución del problema:

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 4u, & 0 < x < \pi,\ t > 0, \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, & t > 0, \\ u(x,0) = f(x), & 0 < x < \pi\,. \end{cases}$$

Calcular razonadamente el límite cuando t tiende a infinito de la solución obtenida.

2. Determinar la solución del problema:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & 0 < x < \pi,\ 0 < y < 1, \\ u(0,t) = u(\pi,y) = 0, & 0 < y < 1, \\ u_y(x,0) = 0, & 0 < x < \pi, \\ u(x,1) = \sin 3x - 2\sin 2x, & 0 < x < \pi\,. \end{cases}$$

3. Determinar para $0 < t < 2$ la solución continua del problema

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & 0 < x < 2, t > 0, \\ u_x(0,t) = t, u(2,t) = 0, & t > 0, \\ u(x,0) = 0, & 0 < x < 2, \\ u_t(x,0) = 1 - 2x, & 0 < x < 2\,. \end{cases}$$

Estudiar la continuidad de $u_t(x,t)$ y $u_x(x,t)$ para $t = 1/2$.