ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES. Curso 02-03.
Examen final. Convocatoria ordinaria. 7 de febrero de 2003.

1. Determinar la solución continua para $t = 3$ de la ecuación

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0\,, & 0 < x < \pi\,, t > 0\,, \\ u(x,0) = \sin x\,, & 0 < x < \pi\,, \\ u_t(x,0) = \cos x\,, & 0 < x < \pi\,, \\ u(0,t) = u_x(\pi,t) = 0\,, & t > 0\,. \end{cases}$$

Estudiar la continuidad de u_t y u_x en $t = 3$.

2. Determinar la solución del problema:

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = t\cos x, & 0 < x < \pi,\ t > 0, \\ u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0, & t > 0, \\ u(x,0) = \cos 2x, & 0 < x < \pi\,. \end{cases}$$

3. Sea D el anillo $\{(x,y) : 1 < x^2 + y^2 < 4\} = \{(r,\theta) : 1 < r < 2\}$ del plano. Sea u solución del problema

$u_{xx}+u_{yy} = 0, (x,y) \in D\,, u_r(1,\theta) = 2\sin^2\theta, 0 \le \theta < 2\pi\,, u(2,\theta) = 0, 0 \le \theta < 2\pi\,.$

Calcular el máximo y el mínimo en $\overline{D}$ de u.

4. Se considera la ecuación

$$u_{tt} - c^2 \Delta u = 0$$

en tres dimensiones espaciales, es decir, el laplaciano se hace en las coordenadas (x,y,z). Si u es una solución radial, $u(x,y,z,t) = w(\rho,t)$ donde $\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$, escribir la ecuación que tiene que cumplir la función w. Hacer el cambio $W = \rho w$, encontrar la solución general para la ecuación en W y deshacer los cambios para dar todas las soluciones radiales de la ecuación original.

ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES. Curso 02-03.
Examen final. Convocatoria extraordinaria. 2 de setiembre de 2003.

1. Dar la solución de

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 1\,, & x > 0\,, t > 0\,, \\ u(x,0) = 0\,, & x > 0\,, \\ u_t(x,0) = 1\,, & x > 0\,, \\ u(0,t) = 0\,, & t > 0\,. \end{cases}$$

Estudiar la continuidad de u_t y u_x. (Sugerencia: Se puede restar de u una solución v de la ecuación, independiente de x, de modo que $u - v$ satisfaga una ecuación homogénea.)

2. Determinar la solución del problema siguiente:

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & 0 < x < \pi,\ t > 0, \\ u(0,t) = 1, u(\pi,t) = 0, & t > 0, \\ u(x,0) = \cos 2x - \dfrac{x}{\pi}, & 0 < x < \pi\,. \end{cases}$$

3. Resolver mediante separación de variables el problema:

$$\begin{cases} u_{xx} + 4u_{yy} = 0\,, & 0 < x < 1,\ 0 < y < 1, \\ u(0,y) = u_x(1,y) = 0\,, & 0 \le y \le 1\,, \\ u_y(x,0) = 0\,, & 0 \le x \le 1\,, \\ u_y(x,1) = 1\,, & 0 \le x \le 1\,. \end{cases}$$

4. (a) Dominio de influencia y dominio de dependencia en la ecuación de ondas unidimensional.

(b) Probar que si existe u no nula tal que

$$\begin{cases} \Delta u = \lambda u, & \text{en } D, \\ u = 0, & \text{en } \partial D, \end{cases}$$

entonces λ es negativo. (Utilizar la fórmula de Green.)