ANALISIS FUNCIONAL. Curso 03-04.
Examen final. Convocatoria ordinaria. 13 de febrero de 2004.

1. Resolver por el método de separación de variables el problema siguiente:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0\,, & 0 < x < \pi/2\,, t > 0\,, \\ u(x,0) = \sin x\,, & 0 < x < \pi/2\,, \\ u_t(x,0) = \sin 2x\,, & 0 < x < \pi/2\,, \\ u(0,t) = u(\pi/2,t) = 0\,, & t > 0\,. \end{cases}$$

2. (a) Calcular $u(x,1)$ para el problema anterior, utilizando el método de las características.

(b) Comprobar que la solución obtenida en (a) coincide con la del problema 1 para $t = 1$.

3. Determinar la solución $u(r,\theta)$ del problema

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & r > 1,\ 0 \le \theta \le 2\pi\,, \\ u_r(1,\theta) = \begin{cases} 1, & 0 \le \theta < \pi\,, \\ -1\,, & \pi < \theta < 2\pi\,, \end{cases} \\ u \text{ acotada.} \end{cases}$$

4. (a) Principio del máximo (débil) para funciones armónicas en el plano. Enunciado y una idea de la demostración.

(b) Calcular el máximo y el mínimo de la función $u(x,y) = e^x \sin y$ en el triángulo cerrado de vértices $(0,0)$, $(\pi,0)$ y $(0,\pi)$.

ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES. Curso 03-04.
Examen final. Convocatoria extraordinaria. 2 de setiembre de 2004.

1. Determinar la solución del problema

$$\begin{cases} u_{tt} - 4u_{xx} = 0, & x > 0,\ t > 0\,, \\ u(x,0) = Ax, & x > 0\,, \\ u_t(x,0) = 1, & x > 0\,, \\ u(0,t) = Bt, & t > 0\,. \end{cases}$$

Estudiar la continuidad de u y sus primeras derivadas en función de las constantes A y B. ¿Es u de clase $\mathcal{C}^2$?

2. Determinar la solución del problema:

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = \sin\dfrac{x}{2}, & 0 < x < \pi,\ t > 0, \\ u(0,t) = u_x(\pi,t) = 0, & t > 0, \\ u(x,0) = 3\sin\dfrac{3x}{2}, & 0 < x < \pi\,. \end{cases}$$

3. Determinar la solución $u(r,\theta)$ del problema

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & r < 2,\ 0 \le \theta \le 2\pi\,, \\ u(2,\theta) = |\sin\theta|, & 0 < \theta < 2\pi\,. \end{cases}$$

Determinar el máximo y el mínimo de u en la bola cerrada centrada en el origen y de radio 2.

4. Sea u una función radial en $\mathbf{R}^n$, es decir, u se escribe $u(x) = f(\|x\|)$ para una función f definida en $(0,\infty)$.

(a) Escribir el laplaciano de u en función de las derivadas de f.

(b) Determinar todas las soluciones radiales de $\Delta u = 0$ en $\mathbf{R}^n$.