ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES. Enero de 2005.

1. Consideramos la ecuación de orden uno

$$(1) \qquad u_t + |u|^2 u_x = 0 \ , \ \text{si} \ \ x \in \mathbb{R} \text{ y } \ t > 0 \ .$$

- Buscamos soluciones de (1) de la forma $u = \psi(\frac{x}{t})$. Comprueba que en términos de la nueva variable $s = \frac{x}{t}$, (1) equivale a
$$\psi'(s)\left(\psi^2(s) - s\right) = 0 \ , \ \text{si} \ \ s \in \mathbb{R} \ .$$
- Encontar una solución de (1) que sea continua y no constante en $\mathbb{R} \times (0, +\infty)$.
- Comprueba que si u es solución de (1), entonces $v = u^2$ es solución de la ecuación de Burgers $v_t + vv_x = 0$, si $x \in \mathbb{R}$ y $t > 0$.

2. Usando el método de las características, calcular los valores de $u(x, \frac{1}{2})$ para $x \in [0, 1]$, si u es la solución continua del problema (*Sugerencia*: $\sin^3 x = \sin x \sin^2 x$).

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & \text{si } 0 < x < 1 \ , \ t > 0 \\ u(x, 0) = 1 & \text{si } 0 < x < 1 \\ u_t(x, 0) = \sin^3 \pi x & \text{si } 0 < x < 1 \\ u_x(0, t) = 0 & \text{si } \ t > 0 \\ u_x(1, t) = 0 & \text{si } t > 0 \ . \end{cases}$$

3. Resolver las siguientes cuestiones.

- Calcular, utilizando el método de separación de variables, la solución del problema parabólico
$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = t \sin x & \text{si } 0 < x < \pi \ , \ t > 0 \\ u(x, 0) = 0 & \text{si } 0 < x < \pi \\ u(0, t) = 0 & \text{si } \ t > 0 \\ u(\pi, t) = 0 & \text{si } t > 0 \ . \end{cases}$$
- Mostrar, que las funciones de la variable espacial que aparecen aquí al construir las soluciones de variables separadas, forman un sistema ortogonal y completo en $L^2([0, \pi])$.

4. Encontrar la solución del problema de Cauchy

$$\begin{cases} 2u_x + 3u_y = 0 \\ u(x, 0) = |x| \end{cases}$$

¿Es u una función de clase $C^1(\mathbb{R}^2)$?. Describir el tipo de singularidades de u_x, allí donde las haya y si las tiene.

5. Encontrar todas las soluciones radiales de la ecuación de Laplace en $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$. Es decir, funciones armónicas u de la forma $u(x, y, z) = \varphi(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$.

ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES. Setiembre 2005.

1. Considerамos la ecuación

$$(1) \qquad \begin{cases} u_t - u_{xx} + cu_x = 0, & \text{en } \mathbb{R} \times (0, +\infty) \\ u(x,0) = \varphi(x), & \text{en } \mathbb{R} \;, \end{cases}$$

siendo c una constante real y φ una función continua y acotado de $\mathbb{R}$.

5 • Comprobar que si u es solución de (1), entonces $v(x,t) = u(x+ct,t)$ resuelve

$$\begin{cases} v_t - v_{xx} = 0, & \text{en } \mathbb{R} \times (0, +\infty) \\ v(x,0) = \varphi(x), & \text{en } \mathbb{R} \;. \end{cases}$$

10 • Encuentra una función $H(x,y,t)$ tal que la solución de (1) se exprese como

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}} H(x,y,t)\varphi(y)\, dy \;.$$

13

2. Usando el método de las características, calcular los valores para $x \in [0,1]$ y $0 < t < 1$, de la solución continua del problema

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & \text{si } 0 < x < 1 \;,\; t > 0 \\ u(x,0) = 0 & \text{si } 0 < x < 1 \\ u_t(x,0) = \cos^3 \pi x & \text{si } 0 < x < 1 \\ u(0,t) = 0 & \text{si } \quad t > 0 \\ u(1,t) = 0 & \text{si } t > 0 \;. \end{cases}$$

3. Resolver las siguientes cuestiones.

10 • Calcular, utilizando el método de separación de variables, la solución del problema

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = t^2 \cos x & \text{si } 0 < x < \pi \;,\; t > 0 \\ u(x,0) = 0 & \text{si } 0 < x < \pi \\ u_x(0,t) = 0 & \text{si } \quad t > 0 \\ u_x(\pi,t) = 0 & \text{si } t > 0 \;. \end{cases}$$

15 • Mostrar, que la familia de funciones que aparecen aquí al construir las soluciones de variables separadas, forman un sistema ortogonal y completo en $L^2([0,\pi])$.

4. Consideramos el problema

$$\begin{cases} u_x + u_y = 0, & x \in \mathbb{R},\; y > 0 \\ u(x,ax) = \varphi(x), & x \in \mathbb{R} \;. \end{cases}$$

siendo a una constante no nula.

5 • ¿Para qué valores de a, la recta $y = ax$ es característica?.

10 • Calcular explícitamente la solución si $a \neq 0$ es tal que la recta $y = ax$ no es característica.