ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES. Enero 2006

Escribir al final de cada problema el nombre y enunciado de todos los teoremas, lemas, proposiciones y corolarios que utilicéis para su resolución. Omitir repeticiones.

1. Resolver el problema de Cauchy

$$\begin{cases} xu_x + yu_y = 2(x^2+y^2)u \ , \\ u(1,s) = e \ , \ \text{si } s \in \mathbb{R} \ . \end{cases}$$

2. Considerar el problema de valores iniciales con condiciones de contorno nulas

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 \ , & \text{en } (0,\pi)\times(0,+\infty) \ , \\ u(x,0) = x(\pi - x) \ , & \text{en } (0,\pi) \ , \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \ , & \text{en } (0,+\infty) \ . \end{cases}$$

- Encontrar la solución por el método de variables separadas.
- Mostrar que

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2(\pi-x)^2\,dx = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{64}{\pi^2(2k+1)^6} \ .$$

- Mostrar que la solución verifica que

$$u \text{ y } u_x \text{ son continuas en } [0,\pi]\times[0,+\infty] \ .$$

- Probar que $u \in C^2([0,\pi]\times(0,+\infty))$.
- ¿Se puede esperar que u_t y u_{xx} sean continuas en $[0,\pi]\times[0,+\infty)$?
- Explicar otro método para encontrar una solución v del problema anterior y razonar el porqué ambos métodos dan la misma solución.
- Resolver por separación de variables el problema no homogéneo

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = xt(\pi - x) \ , & \text{en } (0,\pi)\times(0,+\infty) \ , \\ u(x,0) = 0 \ , & \text{en } (0,\pi) \ , \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \ , & \text{en } (0,+\infty) \ . \end{cases}$$

3. Considerar el problema de valores iniciales con condiciones de Neumann nulas

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 \ , & \text{en } (0,1)\times(0,+\infty) \ , \\ u(x,0) = \cos^4 \pi x \ , & \text{en } (0,1) \ , \\ u_t(x,0) = \cos^2 \pi x \ , & \text{en } (0,1) \ , \\ u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0 \ , & \text{en } (0,+\infty) \ . \end{cases}$$

Comprobar que $u(\frac{1}{2},1) = \frac{1}{2}$.

4. Sabiendo que 1 y $r^k(a_k\cos k\theta + b_k \sin k\theta)$, $k \geq 1$ son las soluciones acotadas en variables separadas de la ecuación de Laplace en coordenadas polares para el círculo unidad, encontrar $u(r,\frac{\pi}{2})$ si u es la solución del problema

$$\begin{cases} u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0 \ , & \text{en } [0,1)\times[-\pi,\pi] \ , \\ u(1,\theta) = 0 \ , & \text{en } (-\pi,0) \ , \\ u(1,\theta) = 1 \ , & \text{en } (0,\pi) \ , \end{cases}$$

y mostrar que u y u_θ son continuas en $[0, \frac{1}{2}] \times [-\pi, \pi]$ ¿Puede ser u continua en $[0, 1] \times [-\pi, \pi]$?

5. Enunciar y demostrar el principio del máximo para la ecuación del calor sobre una barra finita.

ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES. Setiembre 2006

Escribir al final de cada problema el nombre y enunciado de todos los teoremas, lemas, proposiciones y corolarios que utilicéis para su resolución. Omitir repeticiones.

1. Considerar el problema de Cauchy

$$\begin{cases} x^2 u_x + y^2 u_y = u^2 \ , \\ u(x,2x) = 1 \ . \end{cases} \tag{1}$$

• Calcular las curvas características para la ecuación, $x^2 u_x + y^2 u_y = 0$.
• Hallar la solución u de (**??**).

2. Planteamos resolver parcialmente el problema

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = e^x \ , & \text{en } (0,1) \times (0,+\infty) \ , \\ u(x,0) = 0 \ , & \text{en } (0,1) \ , \\ u_t(x,0) = 0 \ , & \text{en } (0,1) \ , \\ u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0 \ , & \text{en } (0,+\infty) \ . \end{cases} \tag{2}$$

Para conseguirlo seguir los pasos indicados:
• Hallar la solución w del problema de Cauchy

$$\begin{cases} w_{tt} - w_{xx} = e^x \ , & \text{en } \mathbb{R} \times (0,+\infty) \ , \\ w(x,0) = 0 \ , & \text{en } \mathbb{R} \ , \\ w_t(x,0) = 0 \ , & \text{en } \mathbb{R} \ . \end{cases}$$

• Calcular los valores de la solución continua u de (**??**) en las regiones

$$\mathcal{A} = \{ \, (x,t) : t \leq x, \ t \leq 1 - x \text{ y } 0 \leq x \leq 1 \, \}$$

y

$$\mathcal{B} = \{ \, (x,t) : 1 - x \leq t \leq x \text{ y } \tfrac{1}{2} \leq x \leq 1 \, \} \ .$$

3. Planteamos resolver por separación de variables el problema de contorno

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} + u = 0 \ , & \text{en } (0,\pi) \times (0,+\infty) \ , \\ u(x,0) = x(\pi - x) \ , & \text{en } [0,\pi] \ , \\ u(0,t) = u_x(\pi,t) = 0 \ , & \text{en } (0,+\infty) \ . \end{cases} \tag{3}$$

• Hallar los autovalores y autofunciones del problema de Stürn-Liouville asociado.
• Suponiendo que las autofunciones forman un sistema completo en $L^2([0,\pi])$, encontrar la solución u de (**??**).
• Mostrar que u es C^∞ en todas las variables en $[0,\pi] \times (1,+\infty)$.

4. ¡Muestra que sabes cambiar de variables!
• Sea $v(x,t) = u(y,s)$, donde $y = x$, $s = at$ y $a > 0$. Probar que

$$\left(\partial_t - a\partial_x^2\right) v(x,t) = a\left(\partial_s u - \partial_y^2 u\right)(x,at) \ .$$

• Encontrar una fórmula del tipo

$$v(x,t) = \int_{\mathbb{R}} H(x,y,t) f(y) \, dy \ ,$$

para la solución v del problema de valores iniciales

$$\begin{cases} v_t - a v_{xx} = 0 \ , & \text{en } \mathbb{R} \times (0, +\infty) \ , \\ v(x,0) = f(x) \ , & \text{en } \mathbb{R} \ , \end{cases}$$

en términos de $f \in C(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$.

5. Demostrar que si $f : [-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$, ampliada como función periódica, es derivable una vez con continuidad en $[-\pi, \pi]$, su serie de Fourier converge uniformemente en $\mathbb{R}$.