ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES. Enero 2007

1. • Mostrar que el problema de Cauchy

$$\begin{cases} u_x + u_y = 0 \ , & \text{en } \mathbb{R}^2, \\ u(x,x) = \varphi(x) \ , & \text{si } x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

tiene una solución u de clase C^1 en $\mathbb{R}^2$ si y sólo si φ es constante en $\mathbb{R}$.

• Si φ es $C^1(\mathbb{R})$, hallar la solución del problema de Cauchy

$$\begin{cases} u_x + u_y - 3u = x \ , & \text{en } \mathbb{R}^2, \\ u(x,0) = \varphi(x) \ , & \text{si } x \in \mathbb{R} \ . \end{cases}$$

2. Queremos resolver por separación de variables

$$\begin{cases} u_t - (1+2t)\, u_{xx} = F(x,t) \ , & \text{en } (0,\pi) \times (0,+\infty) \ , \\ u(x,0) = f(x) \ , & \text{en } (0,\pi) \ , \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \ , & \text{en } (0,+\infty) \ . \end{cases}$$

• Encontrar las soluciones de variables separadas $u_k(x,t) = X_k(x)T_k(t)$ y dar una fórmula para el cálculo de la solución.

• Calcular la solución u del problema anterior si $f(x) = \sin^2 x$ y $F \equiv 0$, y verificar que los coeficientes de Fourier f en la base $\{X_k : k \geq 1\}$ son

$$a_k = -\frac{4\left(1-(-1)^k\right)}{\pi k(k^2-4)} \ , \text{ si } k \neq 2 \text{ y } a_2 = 0 \ .$$

• Mostrar que u y u_x son continuas en $[0,\pi] \times [0,+\infty)$ y que u_{xx} es continua en $[0,\pi] \times (0,+\infty)$

• Razonar por qué la solución no es C^2 en todo $[0,\pi] \times [0,+\infty)$.

3. • Resolver

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \ , & \text{en } (0,\pi) \times (0,\pi) \ , \\ u(0,y) = u(\pi,y) = 0 \ , & \text{en } [0,\pi] \ , \\ u(x,0) = \sin^2 x \ , \ u(x,\pi) = 0 \ , & \text{en } [0,\pi] \ . \end{cases}$$

• Mostrar que la solución es continua en $[0,\pi] \times [0,\pi]$ y C^2 en $[0,\pi] \times (0,\pi]$

4. • Resolver por separación de variables el problema

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = \sin^2 x \ , & \text{en } (0,\pi) \times (0,+\infty) \ , \\ u(x,0) = 0 \ , \ u_t(x,0) = 0 \ , & \text{en } (0,\pi) \ , \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 \ , & \text{en } (0,+\infty) \ . \end{cases}$$

• Hallar por el método de reflexiones la solución del problema

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = \sin^2 x \ , & \text{en } (0,\pi) \times (0,+\infty) \ , \\ u(x,0) = 0 \ , \ u_t(x,0) = 0 \ , & \text{en } (0,\pi) \ , \\ u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0 \ , & \text{en } (0,+\infty) \ . \end{cases}$$

5. • Enunciar y demostrar la propiedad del valor medio y el principio del máximo fuerte para funciones armónicas.

• Escribir y deducir la fórmula para la solución del problema de Dirichlet

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 \ , & \text{en } \mathbb{R} \times (0, +\infty) \ , \\ u(x,0) = f(x) \ , & \text{en } \mathbb{R} \ . \end{cases}$$

ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES. Setiembre 2007

1. • Resolver el problema de Cauchy

$$\begin{cases} (1+x^2)u_x + yu_y = u \ , & \text{en } \mathbb{R}^2, \\ u(0,y) = \varphi(y) \ , & \text{en } \mathbb{R} \ . \end{cases}$$

• Mostrar que las curvas características en esta ecuación son las curvas

$$y = \gamma e^{\arctan x} \ , \ \gamma \in \mathbb{R} \ .$$

2. Queremos resolver por separación de variables

$$\begin{cases} u_{tt} + u_t - u_{xx} = 1 \ , & \text{en } (0,\pi)\times(0,+\infty) \ , \\ u(x,0) = 0 \ , \ u_t(x,0) = g(x) \ , & \text{en } (0,\pi) \ , \\ u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0 \ , & \text{en } (0,+\infty) \ . \end{cases}$$

• Encontrar las soluciones de variables separadas $u_k(x,t) = X_k(x)T_k(t)$ y dar una fórmula para el cálculo de la solución.

• Mostrar que la solución está en $C^2([0,\pi]\times(0,+\infty))$ si g está en $C^2([0,\pi])$ y $g'(0) = g'(\pi) = 0$.

• Hallar la solución si $g(x) = \sin x$ y verificar que los coeficientes de Fourier de g en la base $\{X_k : k \geq 0\}$ son

$$a_k = \frac{1+(-1)^k}{\pi(k+1)} \ , \quad \text{si } k \geq 0 \ .$$

3. • Hallar la solución de

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, & \text{en } (0,\pi)\times(0,1) \ , \\ u_x(0,y) = u_x(\pi,y) = 0 \ , & \text{en } [0,1] \ , \\ u_y(x,0) = \sin x - \frac{2}{\pi} \ , \ u_y(x,1) = 0 \ , & \text{en } [0,\pi] \end{cases}$$

y tal que $\int_{[0,\pi]\times[0,1]} u(x,y)\,dxdy = 0$.

• Mostrar que la solución es continua en $[0,\pi]\times[0,1]$ y C^1 en $[0,\pi]\times(0,1]$.

• Mostrar que

$$\int_0^\pi u(x,\tfrac{1}{2})^2\,dx = \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cosh^2 k}{4k^2(2k+1)^2\sinh^2 2k} \ .$$

4. • Transformar mediante un cambio de variables, el problema

$$\begin{cases} 9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \ , & \text{en } \mathbb{R}\times(0,+\infty) \ , \\ u(x,0) = f(x) \ , & \text{en } \mathbb{R} \ , \end{cases}$$

en

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \ , & \text{en } \mathbb{R}\times(0,+\infty) \ , \\ v(x,0) = f(ax) \ , & \text{en } \mathbb{R} \end{cases}$$

y dar una fórmula para su solución del tipo

$$u(x,y) = \int_{\mathbb{R}} H(x,z,t)f(z)\,dz \ .$$

• Mostrar que u es par respecto del 0 si f es par respecto del 0.

• Utilizando el método de reflexiones dar una fórmula del tipo anterior para la solución de

$$\begin{cases} 9\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 4\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \ , & \text{en } (0,+\infty)\times(0,+\infty) \ , \\ w(x,0) = f(x) \ , & \text{en } (0,+\infty) \ , \\ w(0,y) = 0 \ , & \text{en } (0,+\infty) \ , \end{cases}$$

pero con una integral sobre $(0,+\infty)$

5. Escribir la fórmula estudiada en clase para la solución del problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \ , & \text{en } B \ , \\ u = f \ , & \text{en } \partial B \ . \end{cases}$$

y mostrar que la solución es continua en $\overline{B}$ si f está en $C(\partial B)$ y B es la bola unidad del plano.

ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES. Setiembre 2007

1. • Resolver el problema de Cauchy

$$\begin{cases} (1+x^2)u_x + yu_y = u \ , & \text{en } \mathbb{R}^2, \\ u(0,y) = \varphi(y) \ , & \text{en } \mathbb{R} \ . \end{cases}$$

• Mostrar que las curvas características en esta ecuación son las curvas

$$y = \gamma e^{\arctan x} \ , \ \gamma \in \mathbb{R} \ .$$

2. Queremos resolver por separación de variables

$$\begin{cases} u_{tt} + u_t - u_{xx} = 1 \ , & \text{en } (0,\pi) \times (0,+\infty) \ , \\ u(x,0) = 0 \ , \ u_t(x,0) = g(x) \ , & \text{en } (0,\pi) \ , \\ u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0 \ , & \text{en } (0,+\infty) \ . \end{cases}$$

• Encontrar las soluciones de variables separadas $u_k(x,t) = X_k(x)T_k(t)$ y dar una fórmula para el cálculo de la solución.

• Mostrar que la solución es C^2 en $[0,\pi] \times (0,+\infty)$ si g es C^2 en $[0,\pi]$ y $g'(0) = g'(\pi) = 0$.

• Hallar la solución si $g(x) = \sin x$ y verificar que los coeficientes de Fourier de g en la base $\{X_k : k \geq 0\}$ son

$$a_k = \frac{1+(-1)^k}{\pi(k+1)} \ , \quad \text{si } k \geq 0 \ .$$

3. • Hallar la solución de

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, & \text{en } (0,\pi) \times (0,1) \ , \\ u_x(0,y) = u_x(\pi,y) = 0 \ , & \text{en } [0,1] \ , \\ u_y(x,0) = \sin x - \frac{2}{\pi} \ , \ u_y(x,1) = 0 \ , & \text{en } [0,\pi] \end{cases}$$

que verifica, $\int_{[0,\pi]\times[0,1]} u(x,y)\, dxdy = 0$.

• Mostrar que la solución u es continua en $[0,\pi] \times [0,1]$ y C^1 en $[0,\pi] \times (0,1]$.

• Mostrar que

$$\int_0^\pi u(x,\tfrac{1}{2})^2\, dx = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cosh^2 k}{4k^2(2k+1)^2 \sinh^2 2k} \ .$$

4. • Mediante un cambio de variables, transformar el problema de Dirichlet

$$\begin{cases} 9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \ , & \text{en } \mathbb{R} \times (0,+\infty) \ , \\ u(x,0) = f(x) \ , & \text{en } \mathbb{R} \ , \end{cases}$$

en el problema

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \ , & \text{en } \mathbb{R} \times (0,+\infty) \ , \\ v(x,0) = f(ax) \ , & \text{en } \mathbb{R} \end{cases}$$

• Dar una fórmula para la solución u del primer problema del tipo,

$$u(x,y) = \int_{\mathbb{R}} H(x,z,t) f(z)\, dz$$

y donde H es una función que debes describir.

- Si

$$D = \{(x, y) : 1 < x^2 + y^2 < 4\},$$

hallar por separación de variables, la solución del problema

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & (x, y) \in D, \\ u(1, \theta) = \cos 2\theta, & 0 \leq \theta < 2\pi, \\ \frac{\partial u}{\partial r}(2, \theta) = \sin \theta, & 0 \leq \theta < 2\pi, \end{cases}$$

- Calcular el máximo y el mínimo de u en $\overline{D}$.