ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES. Enero 2008

1. • Resolver el problema de Cauchy para la ecuación no homogénea

$$\begin{cases} u_x - yu_y = y, \\ u(0,y) = \sin y. \end{cases}$$

• Comprobar que la ecuación

$$x^2 u_{xx} + 2xyu_{xy} + y^2 u_{yy} = 0, \tag{1}$$

se reduce con el cambio de variables, $\xi = \frac{y}{x}$, $\eta = y$, a la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0.$$

• Hallar una fórmula general que describa todas las soluciones de (1).

2. • Queremos calcular $u(\frac{1}{2}, 2)$ para la solución u del problema

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = F(x), & \text{en } (0,1) \times (0,+\infty), \\ u(x,0) = f(x), & \text{en } (0,1), \\ u_t(x,0) = 0, & \text{en } (0,1), \\ u_x(x,0) = 0 \text{ y } u(1,t) = 0 & \text{en } (0,+\infty), \end{cases}$$

usando el método de reflexiones. Esto involucra la construcción de unas ciertas funciones $\widetilde{f}$ y $\widetilde{F}$ ¿Cuál es el intervalo más pequeño en $\mathbb{R}$ donde necesito conocer $\widetilde{f}$ y $\widetilde{F}$ para calcular $u(\frac{1}{2}, 2)$?

• Calcular $u(\frac{1}{2}, 1)$ si $f(x) = x^2(1-x)$ y $F(x) = 1 - x$ en $(0,1)$.

3. • Explicar y dar la fórmula para la solución del problema

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = F(x), & \text{en } (0,\pi) \times (0,+\infty), \\ u(x,0) = 0, & \text{en } (0,\pi), \\ u_t(x,0) = 0, & \text{en } (0,\pi), \\ u_x(x,0) = 0 \text{ y } u(\pi,t) = 0 & \text{en } (0,+\infty), \end{cases}$$

que genera el método de separación de variables.

• Calcular la solución si $F(x) \equiv x - \pi$ y mostrar que es C^2 en $[0,\pi] \times [0,+\infty)$.

• Mostrar que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}.$$

4. • Resolver por separación de variables el problema

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} - u = 0, & \text{en } (0,\pi) \times (0,\pi), \\ u(0,y) = 0, \ u(\pi,y) = 0, & \text{en } (0,\pi), \\ u(x,0) = 0, \ u(x,\pi) = x(\pi - x), & \text{en } (0,\pi) \end{cases}$$

y mostrar que u está en $C^1([0,\pi] \times [0,\pi]) \cap C^2([0,\pi] \times [0,\pi))$.

• Calcular el máximo y mínimo en $[0,1]\times[0,2]$ de la solución del problema parabólico

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & \text{en } (0,1)\times(0,+\infty), \\ u(x,0) = x(1-x), & \text{en } (0,1), \\ u(0,t) = e^{2t} - 1,\ u(1,t) = 1 - e^{2t}, & \text{en } (0,+\infty). \end{cases}$$

5. • Explica todo lo que sepas sobre la resolución del problema de Dirichlet para la ecuación de Laplace en la bola unidad, $B = \{(x,y) : x^2 + y^2 < 1\}$, con dato continuo en la frontera de B.

ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES. Junio 2008

1. • Resolver el problema de Cauchy

$$\begin{cases} u_x = y u_y, \\ u(0,y) = \cos y. \end{cases}$$

• Probar que con el cambio de variable, $\xi = \ln x$, $\eta = \ln y$, la ecuación

$$2x u_x - y u_y = 0 \tag{2}$$

se transforma en una ecuación de coeficientes constantes. Calcular la solución general de la ecuación (2) .

2. Calcular para $0 < t < 2$ la solución continua del problema:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0\,, & 0 < x < 2,\ t > 0\,, \\ u_x(0,t) = t\,, u(2,t) = 0\,, & t > 0\,, \\ u(x,0) = 0\,, & 0 < x < 2\,, \\ u_t(x,0) = 1 - 2x\,, & 0 < x < 2\,. \end{cases}$$

Estudiar la continuidad de las funciones $u_t(x,t)$ y $u_x(x,t)$ para $t = 1/2$.

3. Utilizando el método de separación de variables calcular la solución del problema:

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & 0 < x < \pi,\ t > 0 \\ u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0, & t > 0, \\ u(x,0) = x & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

4. • Calcular la solución del problema :

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0\,, & 1 < r < 2,\ 0 \le \theta < 2\pi, \\ u(1,\theta) = 1 - \cos\theta\,, & 0 \le \theta < 2\pi, \\ u(2,\theta) = \sin 2\theta, & 0 \le \theta < 2\pi. \end{cases}$$

• Calcular los valores máximo y mínimo de la solución $\overline{D}$, si

$$D = \{(x,y) : 1 < x^2 + y^2 < 4\}.$$

5. Sea u una función radial en $\mathbb{R}^n$; es decir, $u(x) = f(\|x\|)$ para alguna función f definida en $(0,+\infty)$, $\|x\| = (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)^{1/2}$. Escribir el Laplaciano de u en función de las derivadas de f.

ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES. Setiembre 2008

1. • Encontrar la ecuación diferencial ordinaria que verifican en coordenadas cartesianas las características de la ecuación de primer orden

$$\left(x^2+1\right)u_x - xyu_y = 0.$$

• Resolver el problema de Cauchy

$$\begin{cases} (x^2+1)\,u_x - xyu_y = u, \\ u(0,y) = \varphi(y). \end{cases}$$

2. • Dados a, b y c en $\mathbb{R}$, $a \neq 0$, mostrar que el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + bu_x + cu, & \text{en } \mathbb{R}\times(0,+\infty), \\ u(x,0) = f(x), & \text{en } \mathbb{R}, \end{cases} \tag{3}$$

se reduce a un problema de valores iniciales para la ecuación del calor en $\mathbb{R}\times(0,+\infty)$ por el cambio de variables $v(y,t) = e^{-ct}u(ay-bt,t)$.

• Dar una fórmula integral para la solución u de (3) en términos de f.

3. Resolver por separación de variables el problema

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + u = 0, & \text{en } (0,\pi)\times(0,+\infty), \\ u(0,t) = 0,\ u(\pi,t) = 0, & \text{en } (0,+\infty), \\ u(x,0) = f(x), & \text{en } (0,\pi), \\ u_t(x,0) = 0, & \text{en } (0,\pi), \end{cases}$$

si

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le \frac{\pi}{2}, \\ \pi - x, & \frac{\pi}{2} < x \le \pi. \end{cases}$$

4. • Razonar porqué el problema de Neumann

$$\begin{cases} \triangle u = 0, & \text{en } B, \\ \frac{\partial u}{\partial r} = \sin^2\theta, & \text{en } \partial B, \end{cases}$$

no tiene solución, si $B = \{(x,y) : x^2+y^2 < 1\}$.

• Mostrar que el problema no homogéneo de Neumann

$$\begin{cases} \triangle u = 1, & \text{en } B, \\ \frac{\partial u}{\partial r} = \sin^2\theta, & \text{en } \partial B, \end{cases}$$

si tiene solución y calcularla.

Sugerencia: considerar, $v(x,y) = u(x,y) - \frac{1}{4}(x^2+y^2)$.

5. • Explicar y demostrar los principios del máximo débil y fuerte para funciones armónicas.

• Si u es la solución del problema no homogéneo

$$\begin{cases} \triangle u = -x, & \text{en } \Omega = (-1,1)\times(-1,1), \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

encontrar cotas superiores e inferiores para los valores de u en $[-1,1]\times[-1,1]$.

Sugerencia: considerar $v(x,y) = u(x,y) + \frac{x^3}{6}$.