ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES. Enero 2009

1. • Describir en forma paramétrica y cartesiana todas las curvas características de la ecuación

$$xu_x - yu_y = 0. \tag{1}$$

• Sea $u \in C^\infty(B_2 \setminus \{(0,0)\}$ una solución de (1) en $B_2 \setminus \{(0,0)\}$ que verifica $u(0,1) \neq u(1,0)$. Mostrar que u no tiene límite en el origen.

• Calcular la solución del problema de Cauchy

$$\begin{cases} xu_x - yu_y = xy(1+u^2), \\ u(x,x) = x^2, \ x > 0. \end{cases}$$

2. • Mostrar que

$$\sin^3 x = \tfrac{3}{4}\sin x - \tfrac{1}{4}\sin 3x.$$

• Resolver

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 4y(1-y)\sin^3 x, & \text{en } (0,\pi)\times(0,1), \\ u(x,0) = u(x,1) = 0, & \text{en } (0,\pi), \\ u(0,y) = u(\pi,y) = 0, & \text{en } (0,1). \end{cases}$$

3. • Explicar y dar la fórmula para la solución del problema

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = F(x,t), & \text{en } (0,\pi)\times(0,+\infty), \\ u(x,0) = 0, & \text{en } (0,\pi), \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & \text{en } (0,+\infty), \end{cases}$$

que genera el método de separación de variables.

• Calcular la solución si $F(x,t) = x(\pi - x)$.

• Mostrar que u, u_t, u_x, u_{xx} y u_{xxx} son continuas en $[0,\pi]\times[0,+\infty)$.

4. • Consideramos el problema de Cauchy para la ecuación de ondas no lineal

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + u_t^2 - u_x^2 = e^{-u}F(x,t), & \text{en } \mathbb{R}\times(0,+\infty), \\ u(x,0) = f(x), \ u_t(x,0) = g(x), & \text{en } \mathbb{R}. \end{cases}$$

• Comprobar formalmente que u es solución si y sólo si $v = e^u$ verifica

$$\begin{cases} v_{tt} - v_{xx} = F(x,t), & \text{en } \mathbb{R}\times(0,+\infty), \\ v(x,0) = e^{f(x)}, \ v_t(x,0) = g(x)e^{f(x)}, & \text{en } \mathbb{R}, \end{cases}$$

• Escribir la fórmula de la solución v y deducir una expresión para la solución u.

• Calcular la solución u si $f(x) = x$, $g \equiv 1$ y $F \equiv 1$.

5. Estudiamos la ecuación del calor

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} + 2u_x = 0, & \text{en } \mathbb{R}\times(0,+\infty), \\ u(x,0) = f(x), & \text{en } \mathbb{R}, \end{cases} \tag{2}$$

siendo f una función en $C(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$.

• Comprobar que u es solución de (2) si y sólo si

$$v(\xi,t) = u(\xi + 2t, t)$$

resuelve

$$\begin{cases} v_t - v_{\xi\xi} = 0, & \text{en } \mathbb{R} \times (0, +\infty), \\ v(\xi, 0) = f(\xi), & \text{en } \mathbb{R}. \end{cases}$$

• Encontrar una fórmula del tipo

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}} H(x,y,t) f(y)\, dy.$$

• ¿Por qué puedes asegurar que la solución u que acabas de construir está en $C^\infty(\mathbb{R} \times (0, +\infty)) \cap C(\mathbb{R} \times [0, +\infty)) \cap L^\infty(\mathbb{R} \times (0, +\infty))$? ¿Puedes dar alguna cota explícita para la $\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}\times(0,+\infty))}$ en términos de $\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$?

•¿En qué clase de soluciones puedes asegurar que el problema (2) tiene solución única?

• Si Ω es el cilindro inclinado

$$\Omega = \{(x,t) : \tfrac{x-\pi}{2} < t < \tfrac{x}{2}\ ,\ t > 0\},$$

utilizar el cambio de variables $x = \xi + 2t$ y el método de reflexiones para construir una solución del problema parabólico

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} + 2u_x = 0, & \text{en } \Omega, \\ u(x,0) = \sin^{1001} x, & \text{en } [0, \pi], \\ u(x, \frac{x}{2}) = 0 & \text{en } [0, +\infty), \\ u(x, \frac{\pi - x}{2}) = 0 & \text{en } [\pi, +\infty)], \end{cases}$$

Dar una fórmula explícita de la solución y explicar con detalle por qué funciona el método. No intentéis calcular la solución.

6. Los que tengáis tiempo incluir una demostración del principio del máximo débil para la ecuación del calor en $\mathbb{R} \times (0, +\infty)$ y comentar por qué se sabe que las condiciones que se imponen son necesarias.

Sugerencia: Al calcular por partes las primitivas de $y(1-y)e^{\pm y}$, $y(1-y)e^{\pm 3y}$ y $x(\pi - x)\sin kx$, no dividáis cada integral en dos integrales. Al contrario, proceder como en el siguiente ejemplo,

$$\int y(1-y)e^{3y} dy = \tfrac{1}{3} y(1-y)e^{3y} - \tfrac{1}{3}\int (1-2y)e^{3y} dy \ldots$$

Esto simplifica las cuentas y ayuda a evitar errores. . .

ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES. Setiembre 2009

1. Calcular la solución del problema de Cauchy

$$\begin{cases} u_x + u_y = u^2, \\ u(x,0) = h(x). \end{cases}$$

2. • Hallar por separación de variables la solución del problema

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, \text{ en } (0,1)\times(0,+\infty), \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, \text{ en } (0,+\infty), \\ u(x,0) = \begin{cases} x, \text{ si } 0 \le x \le \frac{1}{2}, \\ 1-x, \text{ si } \frac{1}{2} \le x \le 1. \end{cases} \end{cases}$$

• Mostrar que la solución es continua en $[0,1]\times[0,+\infty)$ y C^1 en $[0,1]\times(0,+\infty)$.

• Mostrar que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}.$$

3. • Calcular por el método de las características los valores en $[0,1]\times[0,1]$ de la solución continua del problema

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = e^x, & \text{en } (0,1)\times(0,+\infty), \\ u(x,0) = 0, u_t(x,0) = 0 & \text{en } (0,1), \\ u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0, & \text{en } (0,+\infty). \end{cases}$$

4. • Hallar por separación de variables la solución del problema

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = \frac{7}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x, & \text{en } (0,\frac{\pi}{2})\times(0,2), \\ u(0,y) = 0, u_x(\frac{\pi}{2},y) = 0 & \text{en } (0,2), \\ u_y(x,0) = u_y(x,2) = 0, & \text{en } (0,\frac{\pi}{2}). \end{cases}$$

5. • Calcular el valor máximo y mínimo en $[0,\pi]\times[0,T]$, $T > 0$, de la solución del problema

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & \text{en } (0,\pi)\times(0,+\infty), \\ u(0,t) = e^{2t}, & \text{en } [0,+\infty), \\ u(\pi,t) = 4, & \text{en } [0,+\infty), \\ u(x,0) = \frac{3}{\pi}x + 1, & \text{en } [0,\pi]. \end{cases}$$

• Mostrar que la solución del problema

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & \text{en } (0,\pi)\times(0,+\infty), \\ u_x(0,t) = 0, & \text{en } [0,+\infty), \\ u_x(1,t) = 0, & \text{en } [0,+\infty), \\ u(x,0) = 7 + 10\cos x & \text{en } [0,\pi], \end{cases}$$

verifica que

$$-3 \le u(x,t) \le 17, \text{ en } [0,\pi]\times[0,+\infty).$$