ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES. Enero 2010

No olvidaros de explicar brevemente cómo encontráis o por qué elegís las soluciones de variables separadas que utilicéis.

1. • Describir las curvas características de la ecuación

$$(1+x^2)u_x + u_y = 0$$

en forma paramétrica y cartesiana. Dibujar las que pasan por $(0,0)$ y por $(0,1)$.

• Determinar los puntos donde la curva $y = x$ es característica.

• Calcular la solución del problema de Cauchy

$$\begin{cases} (1+x^2)u_x + u_y = 0, \\ u(0,y) = \varphi(y). \end{cases}$$

• Mostrar que el único dato de Cauchy φ que genera una solución que verifica

$$\lim_{\sqrt{x^2+y^2}\to+\infty} u(x,y) = 1,$$

es $\varphi \equiv 1$.

2. • Resolver por separación de variables el problema mixto

$$\begin{cases} \triangle u = 0, & \text{en } \Omega, \\ u_r(1,\theta) = g(\theta), & \text{en } [0,\frac{\pi}{2}], \\ u(r,0) = u(r,\frac{\pi}{2}) = 0, & \text{en } [0,1], \end{cases} \quad \text{si } \Omega = \{(r,\theta) : 0 < r < 1, 0 < \theta < \frac{\pi}{2}\}.$$

• Si $g(\theta) = -3\sin 4\theta$, hallar u y su valor mínimo en $\overline{\Omega}$.

• Mostrar con un cambio de variables que la familia de funciones

$$\{\sin(2k\theta) : k \geq 1\}$$

es completa en $L^2(0,\frac{\pi}{2})$.

3. • Probar que toda función regular u que verifica

$$u_{tt} - 4u_{xx} = 0, \text{ en } (0,+\infty)\times(0,+\infty),$$

es de la forma

$$u(x,t) = \varphi(x+2t) + \psi(x-2t),$$

para algunas funciones $\varphi : [0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ y $\psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

• Utilizar el método de las características para dar una fórmula de la solución **continua** del problema

$$\begin{cases} u_{tt} - 4u_{xx} = 0, & \text{en } (0,+\infty)\times(0,+\infty), \\ u(x,0) = f(x),\ u_t(x,0) = g(x), & \text{en } (0,+\infty), \\ u_t(0,t) + u_x(0,t) = 0 & \text{en } (0,+\infty), \end{cases}$$

si f está en $C([0,+\infty))$ y g es integrable en $\mathbb{R}$.

4. Calcular la solución del problema

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = t \sin^2 x, & \text{en } (0,\pi) \times (0,+\infty), \\ u_x(0,t) = 0,\ u_x(\pi,t) = 0, & \text{en } (0,+\infty), \\ u(x,0) = x, & \text{en } (0,\pi). \end{cases}$$

5. Explicar y demostrar la desigualdad de Bessel asociada a una familia ortogonal $\{\varphi_k : k \geq 1\}$ en $L^2(a,b)$.

ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES. Setiembre 2010

No olvidaros de explicar brevemente cómo encontráis o por qué elegís las soluciones de variables separadas que utilicéis.

1. • Describir las curvas características de la ecuación

$$u_x + 2xy\, u_y = u$$

en forma paramétrica y cartesiana. Dibujar las que pasan por $(0,0)$, $(0,1)$ y por $(0,-1)$.

• Calcular la solución del problema de Cauchy

$$\begin{cases} u_x + 2xy\, u_y = u, \\ u(0,y) = y. \end{cases}$$

• ¿Es posible encontrar una solución de

$$\begin{cases} u_x + 2xy\, u_y = 0, \\ u(x,0) = x, \end{cases}$$

definida en un entorno de $(0,0)$?

2. • Determinar para $t = 1$ la solución **continua** del problema

$$\begin{cases} u_{tt} - 4u_{xx} = 0, & \text{en } (0,2) \times (0,+\infty), \\ u(x,0) = x(2-x),\ u_t(x,0) = \sin x & \text{en } [0,2], \\ u_t(0,t) + u_x(0,t) = 1, & \text{en } [0,+\infty), \\ u(2,t) = t, & \text{en } [0,+\infty). \end{cases}$$

3. Se busca una solución acotada del problema

$$\begin{cases} \triangle u = 0, & \text{en } \mathbb{R}^2 \setminus \overline{B_2}, \\ u_r(2,\theta) = \theta - A, & \text{en } -\pi \le \theta \le \pi. \end{cases}$$

• Determinar los valores de A para los que puedes construir una tal solución por separación de variables.

• Mostrar que u es continua en $\mathbb{R}^2 \setminus B_2$.

4. • Resolver

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = tx(\pi - x), & \text{en } (0,\pi) \times (0,+\infty), \\ u(x,0) = 0, & \text{en } (0,\pi), \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, & \text{en } (0,+\infty). \end{cases}$$

5. Demuestra la identidad de Plancherel en $(-\pi,\pi)$ para la familia de funciones

$$\{\cos kx, \sin kx : k \ge 0\}.$$

Puedes suponer que la serie de Fourier de una función en $C_0^\infty(-\pi,\pi)$ converge uniformemente hacia la función en $[-\pi,\pi]$.

ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES. Junio 2010

1. • Encontrar todas las curvas características de la ecuación

$$x^2u_x + y^2u_y = 0.$$

• Calcular la solución del problema de Cauchy

$$\begin{cases} x^2u_x + y^2u_y = u^2, \\ u(x, 2x) = 1. \end{cases}$$

2. • Resolver por separación de variables el problema

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = \sin^2 x, & \text{en } (0, \pi) \times (0, +\infty), \\ u(x, 0) = 0, \ u_t(x, 0) = 0, & \text{en } (0, \pi), \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, & \text{en } (0, +\infty). \end{cases}$$

• Mostrar que u es de clase C^2 en $[0, \pi] \times [0, +\infty)$.
• Hallar por el método de reflexiones la solución v del problema

$$\begin{cases} v_{tt} - v_{xx} = \sin^2 x, & \text{en } (0, \pi) \times (0, +\infty), \\ v(x, 0) = 0, \ v_t(x, 0) = 0, & \text{en } (0, \pi), \\ v_x(0, t) = v_x(\pi, t) = 0, & \text{en } (0, +\infty). \end{cases}$$

3. • Determinar la solución $u(r, \theta)$ del problema

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & r > 1, \ -\pi \leq \theta < \pi, \\ u_r(1, \theta) = \begin{cases} -1, & -\pi \leq \theta < 0, \\ +1, & 0 < \theta \leq \pi, \end{cases} \\ u \text{ acotada.} \end{cases}$$

4. • Enunciar y demostrar el principio del máximo (débil) para funciones armónicas en el plano.

• Calcular el máximo y el mínimo de la función $u(x, y) = e^x \sin y$ en el triángulo cerrado de vértices $(0, 0)$, $(\pi, 0)$ y $(0, \pi)$.