ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES. Enero 2014

1. • Describe las curvas características de la ecuación

$$u_x + y u_y = 0$$

en forma paramétrica y cartesiana.

• Dibuja las características que pasan por $(0,0)$, $(0,1)$ y $(0,-1)$.

• Calcula la solución del problema de Cauchy

$$\begin{cases} u_x + y u_y = -(1+x)\,u, \\ u(0,y) = e^{-y^2}. \end{cases}$$

• Explica si existe o no u en $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ tal que

$$u_x + y u_y = 0, \text{ en } \mathbb{R}^2$$

y que verifique alguna, ambas o ninguna de las condiciones:

$$\text{(A) } u(x, e^x) = 2,\ x \in \mathbb{R}, \quad \text{(B) } u(x, -e^x) = x^2,\ x \in \mathbb{R}.$$

• Calcula la solución de

$$\begin{cases} u u_x + u_y = 1, \\ u(x,x) = \frac{x}{2}\,. \end{cases}$$

2. • Muestra que $\sin(kx)\sinh k(y-\pi)$, $k \geq 1$, son soluciones de variables separadas de la ecuación de Laplace.

• Halla con variables separadas una solución de

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{en } (0,\pi)\times(0,\pi), \\ u(0,y) = u(\pi,y) = u(x,\pi) = 0, & \text{si } x, y \text{ están en } [0,\pi], \\ u(x,0) = \sin^2 x, & \text{en } [0,\pi]. \end{cases}$$

• ¿Bajo qué condiciones sabes que este problema tiene solución única?

3. • Halla la solución u de

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{en } B_2 \setminus \overline{B}_1, \\ u(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,, & \text{en } \partial(B_2 \setminus \overline{B}_1), \end{cases}$$

en coordenadas polares.

4. • Explica cómo resolver por separación de variables el problema parabólico

$$(1) \qquad \begin{cases} u_t - 5u_{xx} = 0, & \text{en } (0,\sqrt{2})\times(0,+\infty), \\ u_x(0,t) = u_x(\sqrt{2},t) = 0, & \text{en } (0,+\infty), \\ u(x,0) = f(x), & \text{en } (0,\sqrt{2}) \end{cases}$$

y escribe una fórmula para la solución generada con ese método.

• Explica un razonamiento matemático que muestre que la solución que encuentras verifica que $u(x,0) = f(x)$ en $[0,\sqrt{2}]$, si f está en $C^\infty([0,\sqrt{2}])$.

• Calcula la solución explícita u de (1) si

$$f(x) = 6 + 4\cos\left(\frac{3\pi}{\sqrt{2}}\,x\right).$$

• Calcula los valores máximos y mínimos de esta solución en $[0, \sqrt{2}] \times [0, +\infty)$ y los puntos dónde se alcanzan.

• Explica cómo construir con otro método otra solución de (1) si

$$f(x) = 6 + 4\cos\left(\frac{3\pi}{\sqrt{2}}\, x\right).$$

• ¿Coincide la segunda solución con la primera? ¿Por qué?

5. Prueba el principio del máximo para

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & x \in \mathbb{R},\ y > 0, \\ u(x,0) = f(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{2}$$

en el semiplano superior y utilízalo para mostrar la unicidad de solución de (2) en una clase razonable de soluciones.

ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES. Junio 2014

1. Calcula la solución del problema de Cauchy

$$\begin{cases} u_x + u_y = u^3, \\ u(0,y) = y^3. \end{cases}$$

2. La solución del problema

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & \text{en } (0,\pi)\times(0,\pi), \\ u(x,0) = u(x,\pi) = 0, & \text{en } (0,\pi), \\ u_x(0,y) = 0, u(\pi,y) = y, & \text{en } (0,\pi), \end{cases}$$

se puede escribir como

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \cosh(nx)\sin(ny).$$

Calcula y justifica la construcción de una posible solución del problema anterior. ¿Puede ser tal solución continua en $[0,\pi]\times[0,\pi]$?

3. • Usando el método que prefieras encuentra una solución de

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & \text{en } (0,+\infty)\times(0,+\infty), \\ u_x(0,t) = 0, & \text{en } (0,+\infty), \\ u(x,0) = xe^{-x},\ \ u_t(x,0) = 0 & \text{en } (0,+\infty). \end{cases}$$

• Halla una solución de

$$\begin{cases} v_t - v_{xx} = 0, & \text{en } (0,+\infty)\times(0,+\infty), \\ v_x(0,t) = t, & \text{en } (0,+\infty), \\ v(x,0) = xe^{-x},\ \ v_t(x,0) = 0 & \text{en } (0,+\infty). \end{cases}$$

que sea continua en $[0,+\infty)\times[0,+\infty)$.

• ¿Es v diferenciable en $(0,+\infty)\times(0,+\infty)$?

4. • Halla con el método de separación de variables las soluciones de los problemas

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & \text{en } (0,\pi)\times(0,+\infty), \\ u(x,0) = x, & \text{en } (0,\pi), \\ u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0, & \text{en } (0,+\infty). \end{cases}$$

y

$$\begin{cases} v_t - v_{xx} = (1+t)\cos^2 x, & \text{en } (0,\pi)\times(0,+\infty), \\ v(x,0) = 0, & \text{en } (0,\pi), \\ v_x(0,t) = v_x(\pi,t) = 0, & \text{en } (0,+\infty). \end{cases}$$

• Muestra que la familia de autofunciones del problema de Sturn-Liouville asociado es completa en $L^2(0,\pi)$. Aquí puedes suponer que

$$\{1, \cos kx, \sin kx\},$$

es una familia completa en $L^2(-\pi,\pi)$.

• Muestra que u es continua en $[0,\pi] \times [0,+\infty)$ ¿Puede ser u de clase C^1 en $[0,\pi] \times [0,+\infty)$?

• Calcula el valor de la suma infinita

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^4}.$$

5. Enuncia y demuestra algún resultado que permita garantizar la unicidad de solución en el problema parabólico

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = 0, & \text{en } \mathbb{R} \times (0,+\infty), \\ u(x,0) = f(x), & \text{en } \mathbb{R}. \end{cases}$$