ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES. Enero 2015

1. Describe las curvas características de la ecuación

$$u_x + \cos(x)\, u_y = 0$$

en forma paramétrica y cartesiana y dibuja las que pasan por $(0,0)$ y $(0,1)$.

• Calcula la solución del problema de Cauchy

$$\begin{cases} u_x + \cos(x) u_y = u, \\ u(0,y) = \varphi(y), \end{cases} \qquad \text{con } \varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}).$$

• Calcula la solución del problema de Cauchy

$$\begin{cases} u_x + \cos(x) u_y = 0, \\ u(x,0) = \psi(x), \end{cases} \qquad \text{con } \psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ \psi \in C^\infty(\mathbb{R}).$$

• ¿Qué puntos del eje real son característicos para esta ecuación?
• Explica por qué el problema

$$\begin{cases} u_x + \cos(x) u_y = 0, \\ u(x,0) = x. \end{cases}$$

no tiene una solución de clase C^1 en el cuadrado $[0, 2\pi] \times [-1, 1]$.

2. Halla en términos de A_0, A_k y B_k, $k \geq 1$, una fórmula para una posible solución de

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{en } 1 < \sqrt{x^2+y^2} < 2, \\ u_r(1,\theta) = f(\theta),\ u(2,\theta) = 0, & \text{en } [-\pi, \pi], \end{cases}$$

si

$$f(\theta) = A_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \cos k\theta + B_k \sin k\theta, \text{ con } \ A_k, B_k \in \mathbb{R},$$

• Si has utilizado en el apartado anterior el método de variables separadas, explica con detalle cómo encuentras las funciones armónicas de variables separadas que son tus bloques para construir la posible solución del problema anterior.
• Calcula explícitamente u si $f(x,y) = A_0 + x$ y muestra que la solución es no negativa en $\overline{B}_2 \setminus B_1$ si $A_0 \leq -\frac{3}{5\log 2}$.

3. Halla por separación de variables una posible solución de

$$(1) \qquad \begin{cases} u_t - u_{xx} = x(\pi - x), & \text{en } (0,\pi) \times (0, +\infty), \\ u(0,t) = u(\pi, t) = 0, & \text{en } (0, +\infty), \\ u(x, 0) = 0, & \text{en } (0, \pi). \end{cases}$$

• Muestra que u, u_t y u_{xx} están bien definidas y son continuas en $[0,\pi] \times [0, +\infty)$.

• Comprueba que

$$\int_0^{\pi} |u(x,1)|^2\,dx = \tfrac{32}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1-e^{-(2k+1)^2}}{(2k+1)^5}\right)^2.$$

4. Encuentra con tu método favorito la solución del problema

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = \sin \pi x, & \text{en } (0,1)\times(0,+\infty),\\ u(x,0) = u_t(x,0) = 0, & \text{en } (0,1),\\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & \text{en } (0,+\infty). \end{cases}$$

5. Enuncia y prueba el Principio de Máximo fuerte para funciones armónicas.

ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES. Junio 2015

1. • Describe las curvas características de la ecuación

$$(1+x^2)u_x + u_y = 0$$

en forma paramétrica y cartesiana. Dibujad las que pasan por $(0,0)$ y por $(0,1)$.

• Determina los puntos donde la curva $y = x$ es característica.

• Calcula la solución del problema de Cauchy

$$\begin{cases} (1+x^2)u_x + u_y = 0, \\ u(0,y) = \varphi(y). \end{cases}$$

• Muestra que el único dato de Cauchy φ que genera una solución que verifica

$$\lim_{\sqrt{x^2+y^2}\to+\infty} u(x,y) = 1,$$

es $\varphi \equiv 1$.

2. • Resuelve por separación de variables el problema

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = \sin^2 x, & \text{en } (0,\pi)\times(0,+\infty), \\ u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = 0, & \text{en } (0,\pi), \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, & \text{en } (0,+\infty). \end{cases}$$

• Muestra que u es de clase C^2 en $[0,\pi]\times[0,+\infty)$.

• Halla por el método de reflexiones la solución v del problema

$$\begin{cases} v_{tt} - v_{xx} = \sin^2 x, & \text{en } (0,\pi)\times(0,+\infty), \\ v(x,0) = 0,\ v_t(x,0) = 0, & \text{en } (0,\pi), \\ v_x(0,t) = v_x(\pi,t) = 0, & \text{en } (0,+\infty). \end{cases}$$

3. • Calcula el valor máximo y mínimo en $[0,\pi]\times[0,T]$, $T>0$, de la solución del problema

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & \text{en } (0,\pi)\times(0,+\infty), \\ u(0,t) = e^{2t}, & \text{en } [0,+\infty), \\ u(\pi,t) = 4, & \text{en } [0,+\infty), \\ u(x,0) = \frac{3}{\pi}x + 1, & \text{en } [0,\pi]. \end{cases}$$

• Muestra que la solución del problema

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & \text{en } (0,\pi)\times(0,+\infty), \\ u_x(0,t) = 0, & \text{en } [0,+\infty), \\ u_x(1,t) = 0, & \text{en } [0,+\infty), \\ u(x,0) = 7 + 10\cos x & \text{en } [0,\pi], \end{cases}$$

verifica que

$$-3 \le u(x,t) \le 17, \ \text{ en } [0,\pi]\times[0,+\infty).$$

4. • Calcula la solución del problema no homogéneo de Neumann

$$\begin{cases} \triangle u = 1, & \text{en } B, \\ \frac{\partial u}{\partial r} = \sin^2\theta, & \text{en } \partial B, \end{cases}$$

Sugerencia: considerar, $v(x,y) = u(x,y) - \frac{1}{4}(x^2+y^2)$.

5. • Halla con el método de separación de variables las soluciones de los problemas

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & \text{en } (0,\pi)\times(0,+\infty), \\ u(x,0) = x, & \text{en } (0,\pi), \\ u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0, & \text{en } (0,+\infty). \end{cases}$$

y

$$\begin{cases} v_t - v_{xx} = (1+t)\cos^2 x, & \text{en } (0,\pi)\times(0,+\infty), \\ v(x,0) = 0, & \text{en } (0,\pi), \\ v_x(0,t) = v_x(\pi,t) = 0, & \text{en } (0,+\infty). \end{cases}$$

• Muestra que u es continua en $[0,\pi]\times[0,+\infty)$ ¿Puede ser u de clase C^1 en $[0,\pi]\times[0,+\infty)$?

• Calcula el valor de la suma infinita

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^4}.$$