**ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES. Enero 2018**

**1.** (a) Describe las curvas características de la ecuación.

$$2yu_x + u_y = 0$$

y dibuja las que pasan por $(-1,0)$, $(0,0)$ y $(1,0)$.

(b) Estudia si alguna solución de

$$\begin{cases} 2yu_x + u_y = 0, \\ u(0,y) = \varphi(y), \end{cases}$$

puede ser continua en $(-1,0)$, cuando $\varphi$ está en $C^\infty(\mathbb{R})$, $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = 2$ y $\varphi(-1) = 0$.

(c) Calcula la solución de

$$\begin{cases} 2yu_x + u_y = 3u, \\ u(x,0) = \varphi(x). \end{cases}$$

**2.** (a) Halla la solución del problema

$$\begin{cases} u_{tt} - 4u_{xx} = 0, & \text{en } (0,+\infty) \times (0,+\infty), \\ u(x,0) = \frac{1}{(x+1)^2}, & \text{en } (0,+\infty), \\ u_t(x,0) = 0, & \text{en } (0,+\infty), \\ u_x(0,t) = 0, & \text{en } (0,+\infty). \end{cases}$$

(b) ¿Puedes predecir sin calcular la solución que su gradiente tendrá algún punto de discontinuidad? ¿Por qué?

(c) Estudia y describe su regularidad en $[0,+\infty) \times [0,+\infty)$.

**3.** Resuelve el problema

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & \text{en } (0,1) \times (0,+\infty), \\ u(x,0) = \cos^4 \pi x & \text{en } (0,1), \\ u_t(x,0) = \cos^2 \pi x, & \text{en } (0,1), \\ u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0, & \text{en } (0,+\infty). \end{cases}$$

**4.** Halla la solución del problema

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & \text{en } (0,\pi) \times (0,+\infty), \\ u(x,0) = x & \text{en } (0,\pi), \\ u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0, & \text{en } (0,+\infty). \end{cases}$$

**5.** Describe cómo calcular una solución y obtener un resultado de unicidad para el problema

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x,t), & \text{en } \mathbb{R} \times (0,+\infty), \\ u(x,0) = 0, & \text{en } \mathbb{R}, \\ u_t(x,0) = 0, & \text{en } \mathbb{R}, \end{cases}$$

$c > 0$, por el método de D'Alambert, cuando $F$ es $C^\infty$ en su dominio.

**ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES. Junio 2018**

**1.** (a) Describe las curvas características de la ecuación

$$u_x + (1+y^2)u_y = 0$$

y dibuja las que pasan por $(0,0)$, $(\frac{\pi}{2},0)$ y $(-\frac{\pi}{2},0)$.

(b) Calcula la solución del problema de Cauchy

$$\begin{cases} u_x + (1+y^2)u_y = 0, \\ u(x,0) = \varphi(x). \end{cases}$$

(c) Halla los datos de Cauchy $\varphi$ que dan lugar a una solución que verifica

$$\lim_{\sqrt{x^2+y^2}\to+\infty} u(x,y) = 10.$$

**2.** Sea el problema

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & \text{en } \mathbb{R}\times(0,+\infty), \\ u(x,0) = 0, & \text{en } \mathbb{R}, \\ u_t(x,0) = \max\{1-2|x|, 0\}, & \text{en } \mathbb{R}, \end{cases}$$

Determínese

- $\operatorname{sop} u \cap \{t=1\}$, siendo $\operatorname{sop} u$ la clausura de puntos donde $u \neq 0$.
- La solución del problema.
- La gráfica de $u(0,t)$, siendo $u$ la solución.

**3.** Hallad la solución de

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = xt(\pi - x), & \text{en } (0,\pi)\times(0,+\infty), \\ u(x,0) = 0 & \text{en } (0,\pi), \\ u_t(x,0) = \cos^2 \pi x, & \text{en } (0,\pi), \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, & \text{en } (0,+\infty). \end{cases}$$

**4.** Sean

$$\Omega = \left\{x \in \mathbb{R}^N; |x| > 1\right\}, \;\; N > 1,$$

y $u \in C^2(\overline{\Omega})$ tal que

$$\Delta u = 0, \text{ en } \Omega$$

$$\lim_{|x|\to\infty} u(x) = 0.$$

Mostrad que

$$\max_{x\in\overline{\Omega}} |u(x)| = \max_{|x|=1} |u(x)|.$$

(Indicación: se podrá aplicar el principio del máximo en coronas esféricas).

**5.** Demostrar el principio del máximo para una función $u$ en un dominio $\Omega$ abierto y acotado de $\mathbb{R}^N$