$$\begin{cases} (a(x)\,u')' + b(x)\,u' + c(x)\,u = -g(x), & \text{en } [0,1] \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

$a \in C^1([0,1])$, $b, c \in C([0,1])$, $g \in C([0,1])$

Si $B(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{b(t)}{a(t)}\,dt$, (1) es equivalente a

$$\begin{cases} e^{-B(x)} \dfrac{d}{dx}\left(a(x)\, e^{B(x)} \dfrac{du}{dx}\right) + c(x)\,u = -g(x), & \text{en } [0,1] \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \qquad (2)$$

Si $\psi(x) = \dfrac{1}{L} \displaystyle\int_0^x a^{-1}(t)\, e^{-B(t)}\,dt$, $\psi : [0,1] \longrightarrow [0,1]$,

$t = \psi(x)$, $\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{1}{L}\, a^{-1}(x)\, e^{-B(x)} > 0$, en $[0,1]$. Si

definimos $v(t) = u(x) = u(\psi^{-1}(t))$, o equivalentemente

$u(x) = v \circ \psi(x)$, se verifica que

$$a(x)\, e^{B(x)} \frac{du}{dx}(x) = L^{-1} \frac{dv}{dt}$$

$$\frac{d}{dx}\left(a(x) e^{B(x)} \frac{du}{dx}\right) = L^{-1} \frac{d}{dx}\left(\frac{dv}{dt}\right) = L^{-1} \frac{d^2 v}{dt^2}\, \frac{dt}{dx};$$

$$e^{-B(x)} \frac{d}{dx}\left(a(x)\, e^{B(x)} \frac{du}{dx}\right) = L^{-2}\, a^{-1}(x)\, e^{-2B(x)} \frac{d^2 v}{dt^2}.$$

y (2) es ahora equivalente a

$$\begin{cases} \dfrac{d^2v}{dt^2} + L^2 a(x) e^{2B(x)} c(x)\, u(x) = -L^2 a(x) e^{2B(x)} g(x), & x \in (0,1) \\ v(0) = v(1) = 0. \end{cases}$$ ②

Si definimos $\rho(t) = L^2 a(x) e^{2B(x)} c(x)$,

$$f(t) = L^2 a(x) e^{2B(x)} g(x).$$

el problema original es equivalente a

$$\begin{cases} \dfrac{d^2v}{dt^2} + \rho(t) v(t) = -f(t), & \text{en } [0,1] \\ v(0) = v(1) = 0, & \text{con } \rho \in C([0,1]). \end{cases} \quad (3)$$

Cambiamos notación y usamos la notación $u = u(t)$ en lugar de $v = v(t)$

$$\begin{cases} \dfrac{d^2u}{dt^2} + \rho(t) u = -f(t) & \text{en } [0,1] \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \quad (3)$$

¿Como resolvemos tal problema? Supondremos por ahora que $\rho(t) \leq 0$ en $[0,1]$, y queremos encontrar y mostrar que (3) admite una única solución $u \in C^2([0,1])$.

Sean $u_1$ y $u_2$ soluciones no nula de

$$u'' + \rho(t) u = 0, \quad \text{en } [0,1]$$

tales que $u_1(0) = u_2(1) = 0$. Si

$$\overline{W}(t) = \begin{vmatrix} u_1(t) & u_2(t) \\ u_1'(t) & u_2'(t) \end{vmatrix}$$ es el Wronskiano de $u_1$ y

$u_2$, sabemos que $\overline{W}'(t) \equiv 0$ en $[0,1]$ y $\overline{W}(t) \equiv \overline{W}(0)$

$= u_2(0)\, u_1'(0)$. Como $\rho(t) \leq 0$ en $[0,1]$, se verifica

que $\overline{W}(0) \neq 0$, ya que si $\overline{W}(0) = 0$, entonces $u_1'(0) = 0$

o $u_2(0) = 0$. Lo primero no puede ocurrir porque $u_1 \not\equiv 0$

en $[0,1]$. Si fuera $u_2(0) = 0$, multiplicamos (3)

con $u = u_2$ y $f \equiv 0$ por $u_2$ e integrando por partes,

$$0 = \int_0^1 (u_2'' + \rho\, u_2)\, u_2\, dt = - \int_0^1 (u_2')^2 - \rho\, u_2^2\, dt,$$

$\int_0^1 (u_2')^2 - \rho\, u_2^2\, dt = 0$. y por tanto $u_2 \equiv 0$, que es una

contradicción. Entonces $\{u_1, u_2\}$ es una base de soluciones

de la ecuación homogénea, $u'' + \rho u = 0$, en $[0,1]$ y

para encontrar una solución particular de

$$u'' + \rho u = -f, \quad \text{en } [0,1],$$

escribimos (MVC, método de variación de las constantes),

$$\begin{aligned} u_p(t) &= \alpha(t)\, u_1(t) + \beta(t)\, u_2(t) \\ u_p'(t) &= \alpha(t)\, u_1'(t) + \beta(t)\, u_2'(t), \quad \text{si } \alpha' u_1 + \beta' u_2 = 0; \\ u_p''(t) &= \alpha(t)\, u_1''(t) + \beta(t)\, u_2''(t) + \alpha'(t) u_1' + \beta'(t) u_2'. \end{aligned}$$

y $u_p'' + \rho\, u_p = \alpha' u_1' + \beta' u_2' = -f(t)$; si

$$\begin{cases} \alpha' u_1 + \beta u_2 = 0. \\ \alpha' u_1' + \beta' u_2' = -f \end{cases}, \quad \text{en } [0,1].$$

Por Cramer resolvemos el sistema y concluimos que

$$\alpha'(t) = \frac{u_2(t) f(t)}{W(0)}, \qquad \beta'(t) = -\frac{u_1(t) f(t)}{W(0)} \quad \text{en } [0,1]$$

y

$$u_p(t) = \int_0^t \frac{u_1(t) u_2(s) - u_2(t) u_1(s)}{W(0)} f(s)\,ds, \quad \text{en } [0,1].$$

Claramente, toda solución de $u'' + \rho u = -f$ es de la forma

$$u(t) = u_p(t) + \delta u_1(t) + \gamma u_2(t),$$

para algún $\delta, \gamma \in \mathbb{R}$. Ahora, $u(0) = \gamma u_2(0) = 0$, si $\gamma = 0$, y $u(1) = u_p(1) + \delta u_1(1) = 0$, si $u_1(1) \neq 0$ y

$$\delta = -\frac{u_p(1)}{u_1(1)}.$$

Como antes, el hecho de que $\rho \leq 0$ en $[0,1]$, implica que $u_1(1) \neq 0$ y que

$$u(t) = \int_0^t \frac{u_1(t) u_2(s) - u_2(t) u_1(s)}{W(0)} f(s)\,ds$$

$$- \int_0^1 \frac{u_1(t)\, u_2(s)}{W(0)} f(s)\,ds$$

$$= \int_0^1 k(t,s) f(s)\,ds;$$

donde

$$k(t,s) = \begin{cases} -\dfrac{u_2(t)\, u_1(s)}{W(0)}, & \text{si } 0 < s \leq t \leq 1, \\[2ex] -\dfrac{u_1(t)\, u_2(s)}{W(0)}, & \text{si } 0 < t \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Ahora, es fácil comprobar que si $f \in C([0,1])$, entonces

$$u(t) = K(f)(t) = \int_0^t k(t,s) f(s)\,ds \quad ; \quad \boxed{\begin{array}{l} k(t,s): \text{función de Green} \\ \text{en } [0,1] \text{ para } \frac{d^2}{dt^2} + \rho(t). \end{array}}$$

verifica que $u \in C^2([0,1])$ y

$$(4) \quad \begin{cases} u'' + \rho(t) u(t) = -f(t), & \text{en } [0,1] \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

Además $u$ es la única función en $C^2([0,1])$ que es solución de (4).

Algunas propiedades de la función de Green:

① Como $\rho \in C([0,1])$ sabemos por EDO que $u_1, u_2 \in C^2([0,1])$.

En particular,

- $\sup\limits_{t,s \in [0,1]} |k(t,s)| = \|k\|_{L^\infty([0,1]\times[0,1])} < +\infty$.
- $\int_0^1 \int_0^1 |k(t,s)|^2\,dt\,ds < +\infty$
- $k(t,s) = k(s,t), \ \forall t,s \in [0,1]$.

Es decir, el operador

$$K : L^2([0,1]) \longrightarrow C([0,1]) \subset L^2([0,1])$$
$$f \longmapsto K(f) \mid K(f)(t) = \int_0^1 k(t,s) f(s)\,ds$$

es autoadjunto y compacto. Además, si $f \in C([0,1])$, $u(t) = K(f)(t)$ es la única solución en $C^2([0,1])$ de (4)

Dem: Tenemos

$$u(t) = -\frac{1}{W(0)}\left[\int_0^t u_2(t) u_1(s) f(s)\,ds + \int_t^1 u_1(t) u_2(s) f(s)\,ds\right]. \quad (5)$$

$$u(0) = -\frac{1}{W(0)} \int_0^1 u_1(0) u_2(s) f(s)\,ds \equiv 0, \text{ puesto que } u_1(0)=0. \quad ⑥$$

$$u(1) = -\frac{1}{W(0)} \int_0^1 u_2(1) u_1(s) f(s)\,ds \equiv 0, \text{ puesto que } u_2(1) = 0.$$

$$u'(t) = -\frac{1}{W(0)} u_2(t) u_1(t) f(t) + \frac{1}{W(0)} u_1(t) u_2(t) f(t)$$

$$- \frac{1}{W(0)} \left[ \int_0^t u_2'(t) u_1(s) f(s)\,ds + \int_t^1 u_1'(t) u_2(s) f(s)\,ds \right]$$

$$= -\frac{1}{W(0)} \left[ \int_0^t u_2'(t) u_1(s) f(s)\,ds + \int_t^1 u_1'(t) u_2(s) f(s)\,ds \right].$$

$$u''(t) = -\frac{W(t)}{W(0)} f(t) - \frac{1}{W(0)} \left[ \int_0^t u_1''(t) u_2(s) f(s)\,ds + \right.$$

$$\left. + \int_t^1 u_2''(t) u_1(s) f(s)\,ds \right]$$

$$= -f(t) - \frac{1}{W(0)} \left[ \int_0^t u_1''(t) u_2(s) f(s)\,ds \right.$$

$$\left. + u_2''(t) u_1(s) f(s)\,ds \right] \qquad (6)$$

y si multiplicamos (5) por $\rho(t)$ y lo sumamos a (6), vemos que $u \in C^2([0,1])$ y

$$\begin{cases} u'' + \rho(t) u = -f, & \text{en } [0,1] \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

$\boxed{\text{Si } f \in L^2([0,1]), u = K(f) \text{ está en } C^1([0,1]), u' \text{ es absol. continua en } [0,1], u'' \in L^2([0,1]) \text{ y } u'' + \rho(t)u = -f \text{ en c.t.p. de } [0,1]}$

Claramente $K$ es inyectivo, porque si $f \in L^2([0,1])$ y $u(t) = K(f) \equiv 0$, se sigue que $f \equiv u'' + \rho(t) u \equiv 0$ en $[0,1]$.

Como $Im(K) \subset C^1([0,1]) \subsetneq L^2([0,1])$, $0 \in \sigma(K) \setminus \sigma_p(K)$.

¿Qué es $\sigma(K)\setminus\{0\}$? Como $K$ es autoadjunto, sabemos que (7)
$\sigma(K)\subset\mathbb{R}$ y como es compacto, $\lambda\in\sigma(K)$ y $\lambda\neq 0$ si y sólo si, $\lambda I-K: L^2([0,1])\to L^2([0,1])$ es no inyectivo; es decir, si $\exists\, f\in L^2([0,1])$, $f\not\equiv 0$ t.q. $\lambda f(t)=K(f)(t)$ p.c.t $t\in[0,1]$.
Esta identidad muestra que $f\in C([0,1])$ y por tanto, que $f\in C^2([0,1])$, $f\not\equiv 0$ y verifica

$$\begin{cases} f''+\rho(t)f=-\lambda^{-1}f, & \text{en } [0,1] \\ f(0)=f(1)=0. \end{cases}$$

Si $\lambda<0$, entonces

$$\begin{cases} f''+(\rho(t)+\lambda^{-1})f=0, & \text{en } [0,1] \\ f(0)=f(1)=0 \end{cases}$$

y $\rho(t)+\lambda^{-1}<0$ en $[0,1]$, lo que implica $f\equiv 0$. Por tanto $\lambda>0$.

Recíprocamente si $u\in C^2([0,1])$, $u\not\equiv 0$ y

$$\begin{cases} u''+\rho(t)u=-\lambda^{-1}u, \\ u(0)=u(1)=0, \end{cases}$$

para algun $\lambda\in\mathbb{R}$, entonces $\lambda>0$ y $(\lambda I-K)(u)\equiv 0$.

Sabemos que $0\in\sigma(K)$, $\mathrm{Im}(K)\subset C([0,1])$ y $\mathrm{Ker}(K)\equiv 0$.
Por el Tma 2.5.5 en B. Cascales- - - .pdf existe una base ortonormal $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $L^2([0,1])$ formada por autovectores $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $K$ con $Ke_n=\lambda_n e_n$, $\lambda_n>0$, $\lim_{n\to+\infty}\lambda_n=0$ y tal que

$$K(f)=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\langle f,e_n\rangle e_n,\quad \forall f\in L^2([0,1]).$$

Es decir, una base ortonormal $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $L^2([0,1])$ tal que $e_n\in C^2([0,1])$, $e_n\not\equiv 0$ y

$$\begin{cases} e_n'' + \rho(t) e_n + \mu_n e_n = 0, & \text{en } [0,1] \\ e_n(0) = e_n(1) = 0, \end{cases}$$

$\mu_n = \lambda_n^{-1}$, $0 < \mu_1 \leq \mu_2 \leq \mu_3 \cdots \leq \mu_k \cdots$; y $\lim_{k\to+\infty} \mu_k = +\infty$.

Resolver para $\lambda \neq 0$, $f \in C([0,1])$, el problema de contorno

$$(7) \quad \begin{cases} u'' + \rho(t) u + \lambda^{-1} u = -f, & \text{en } [0,1] \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

con $u \in C^2([0,1])$, es equivalente a resolver

$$\begin{cases} u'' + \rho(t) u = -(\lambda^{-1} u(t) + f(t)) \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases}$$

o equivalentemente a encontrar $u \in C([0,1])$ tal que

$$u(t) = K(\lambda^{-1} u + f), \quad \text{en } [0,1],$$

$$(8) \quad (\lambda I - K)(u) = \lambda f, \quad \text{en } [0,1].$$

Es decir, que necesariamente,

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle \lambda^{-1} u + f, e_n \rangle e_n, \quad \text{en } L^2([0,1]);$$

o lo que es lo mismo,

$$\left(1 - \frac{\lambda_n}{\lambda}\right) \langle u, e_n \rangle = \langle f, e_n \rangle, \quad \forall n \geq 1.$$

La ecuación anterior tiene solución única si y sólo si $\lambda \neq \lambda_n$, $\forall n \geq 1$. En tal caso, (8) tiene una única solución en $L^2([0,1])$ - que de hecho está en $C([0,1])$ - lo equivalentemente, (7) tiene una única solución $u \in C^2([0,1])$ que se escribe como

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda}{\lambda - \lambda_n} \langle f, e_n \rangle e_n.$$

Las $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ forman una base de autofunciones en $L^2([0,1])$ del operador $\frac{d^2}{dt^2}+\rho(t)$, que corresponden a la solución del problema de Sturm-Liouville asociado a $\left(\frac{d}{dt}\right)^2+\rho(t)$ en $[0,1]$ con condiciones de contorno nulas en el borde de $[0,1]$ y con autovalores

$$0<\mu_1\leq\mu_2\leq\mu_3\cdots\leq\mu_k\leq\cdots,$$

$\lim_{k\to\infty}\mu_k=+\infty$ y $\mu_k=\lambda_k^{-1}$, donde

$$\lambda_1\geq\lambda_2\geq\lambda_3\cdots\geq\lambda_k\geq\cdots>0,$$

son los autovalores de $K: L^2([0,1])\longrightarrow L^2([0,1])$.

Es decir, utilizando el tma. espectral hemos demostrado lo siguiente:

Tma: Sea $\rho\in C([0,1])$, $\rho\leq 0$ en $[0,1]$. Entonces, el conjunto de $\mu\in\mathbb{C}$ tal que el problema

$$\begin{cases} u''(t)+\rho(t)u(t)+\mu u(t)=-f(t) \\ u(0)=u(1)=0 \end{cases}$$

tiene solución única $u\in C^2([0,1])$ para toda $f\in C([0,1])$ es todo el plano complejo $\mathbb{C}$ excepto por una sucesión de valores de $\mu$'s

$$0<\mu_1\leq\mu_2\leq\mu_3\leq\cdots\leq\mu_k\leq\cdots$$

tal que $\lim_{k\to+\infty}\mu_k=+\infty$. Cuando $\mu=\mu_k$ para algún $k\geq 1$, existe $e_k\in C^2([0,1])$, $\|e_k\|_{L^2([0,1])}=1$, tal que

$$\begin{cases} e_k'' + \rho(t)\, e_k + \mu_k e_k = 0, & \text{en } [0,1] \\ e_k(0) = e_k(1) = 0. \end{cases}$$

Además $\{e_k : k \geq 1\}$ es una base ortonormal de $L^2([0,1])$ y toda $f \in L^2([0,1])$ se puede escribir de forma única como

$$f \sim \sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k,$$

con $a_k = \int_0^1 f(t) e_k(t)\, dt$. y en el sentido de que

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{N} a_k e_k \right\|^2_{L^2([0,1])} = \|f\|^2_{L^2([0,1])} - \sum_{k=1}^{N} |a_k|^2 \to 0,$$

si $N \to +\infty$ y

$$\|f\|_{L^2([0,1])} = \left( \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 \right)^{1/2},$$

para toda $f$ en $L^2([0,1])$.