Medida e Integración / Grupo 1
Tercer curso de Grado en Matemáticas
Examen Final / Enero de 2013

A) **Cuestiones**

1. Escribe la definición de conjunto medible Lebesgue y prueba que, si $F \subset E$ y $m^*(E) = 0$, entonces F es medible.

2. Escribe la definición de función medible Lebesgue y prueba que, si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones medibles Lebesgue, entonces $\operatorname{ínf} f_n$ es medible.

3. Sea f una función medible y no negativa. Prueba que, si f es integrable, entonces $f = 0$ c.s.

4. Sea $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ la función definida por $f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 1/(2n)! < x \leq 1/(2n-1)! \\ 0 & \text{en el resto.} \end{cases}$.

¿Es integrable la función $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$ en $[0,1]$? ¿Cuánto vale $\displaystyle\int_0^1 f$?

B) **Teoría**

5. Enuncia el lema de Fatou y demuestra el teorema de la convergencia dominada.

C) **Problemas**

6. a) Calcula $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^n e^{-2x^2 - 1/n}\, dx$.

b) Calcula $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \int_y^{\pi/2} \frac{y \operatorname{sen} x}{x^2}\, dx\, dy$. Dibuja el dominio de integración en $\mathbb{R}^2$ y deduce si la función $f(x,y) = \dfrac{y \operatorname{sen} x}{x^2}$ es integrable en dicha región.

7. Sea

$$F(t) = \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(tx) e^{-x^2 t}}{x^{3/2}}\, dx.$$

a) ¿Está bien definida para $t > 0$? ¿Y para $t < 0$?

b) ¿Es continua para $t > 0$?

c) ¿Es derivable para $t > 0$?

8. Sean $f \in L^\infty(0,1)$ y $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt[4]{x(1-x)}}$.

(a) ¿Es g integrable en $(0,1)$? ¿Es $f \cdot g$ integrable en $(0,1)$?

(b) Si $f(x) = x^{3/2}$, ¿para qué valores de p se verifica que $f \cdot g \in L^p(0,1)$?

Observación: Todas las respuestas deben estar correctamente justificadas.

Puntuación: 1/2 punto cada cuestión, 2 puntos la teoría, 2 puntos cada problema.