**Medida e Integración / Grupo 1**
**Tercer curso de Grado en Matemáticas**
**Examen final / Enero de 2014**

A) **Cuestiones**

**1)** Escribe la definición de función medible Lebesgue y prueba que, si $f$ es medible, entonces $f^2$ es medible. ¿Es cierto que si $f$ es integrable, entonces $f^2$ es integrable?

**2)** Sea $f$ una función integrable y no negativa. Si $\alpha > 0$ y $E_\alpha = \{x : f(x) > \alpha\}$, prueba que $\lim_{\alpha\to\infty} m(E_\alpha) = 0$.

**3)** Sea $f$ una función medible en $E$, con $m(E) < \infty$. Prueba que $\dfrac{f}{1+|f|}$ es integrable en $E$.

**4)** Sea $f \in L^p(X)$ una función acotada, siendo $p > 1$. Demostrar la siguiente desigualdad:

$$\forall\, q > p,\ ||f||_q \leq ||f||_p^{p/q} ||f||_\infty^{1-p/q}.$$

B) **Teoría**

Enuncia y demuestra el teorema de Fubini para funciones no negativas.

C) **Problemas**

**5)** a) Explica el enunciado del teorema de la convergencia dominada.
b) Aplica este resultado para calcular

$$\lim_{n\to+\infty} \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\log(nx)\sin(nx)}{1+nx^3}\,dx.$$

**6)** a) Muestra que la función $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$f(x,y,z,w) = \frac{\sin\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{|z|\,(x^2+y^2)}}\log w,$$

es integrable en

$$\Omega = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x^2+y^2 < 2, |z| < 4, 0 < w < 1\}.$$

b) Calcula la integral de $f$ sobre $\Omega$.

**7)** Dada una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, se define

$$F(t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\sqrt{|t-x|}}{1+(t-x)^2} f(x)\,dx.$$

a) Muestra que $F$ es acotada en $\mathbb{R}$ si $f$ está en $L^2(\mathbb{R})$ y halla alguna cota superior para $\sup_{t\in\mathbb{R}} |F(t)|$.
b) Muestra que $F$ es continua en $\mathbb{R}$ si $f$ está en $L^1(\mathbb{R})$.

**Puntuación:**
1/2 punto cada cuestión, 2 puntos la teoría, 2 puntos cada problema.
Todas las respuestas deben estar correctamente justificadas.