Medida e Integración / Grupo 1
Tercer curso de Grado en Matemáticas
Convocatoria extraordinaria / Junio de 2014

A) Cuestiones

1) Sean $f(x) = x^2$ y m la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$. Demuestra o da un contraejemplo que decidan la veracidad o falsedad del siguiente enunciado: Si $E \subset (0, +\infty)$ es un conjunto medible y $m(E) = 0$, entonces $m(f(E)) = 0$.

2) Muestra que si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es integrable, entonces

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\{|f(x)|>n\}} f(x)\, dx = 0.$$

3) Dada la sucesión

$$f_n(x) = \begin{cases} \chi_{[0,1/2]}(x) & \text{si } n \text{ es par} \\ \chi_{(1/2,1]}(x) & \text{si } n \text{ es impar,} \end{cases}$$

calcular $\displaystyle\int_0^1 \liminf f_n$ y $\displaystyle\liminf \int_0^1 f_n$. ¿Verifica esta sucesión las hipótesis del lema de Fatou? ¿Qué puedes concluir a partir de ella?

4) Sean $f \in L^5(\mathbb{R})$ y $g \in L^{5/4}(\mathbb{R})$. Prueba que $fg \in L^1(\mathbb{R})$.

B) Teoría

Enuncia y demuestra el teorema de Leibniz sobre la derivabilidad de funciones dependientes de un parámetro.

C) Problemas

5) Sea $f_n(x) = \left(x + \dfrac{1}{n}\right)^{-1/2} e^{-n^2 x}$.

- Muestra que $f_n \in L^1(0, \infty)$, para todo $n \geq 1$.
- Calcula el límite
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f_n(x)\, dx.$$

6) Definimos $F(t) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-tx^3}}{1 + x^4}\, dx$.

- Demuestra que F es una función definida en $[0, \infty)$ con valores reales.
- Muestra que F es continua en $[0, \infty)$.
- Muestra que F es derivable en $(0, \infty)$.
- Calcula $\displaystyle\lim_{t\to 0^+} F'(t)$.

7) Sea $f(x,y) = e^{-xy^2}\sin x$.

- ¿Es f integrable en $(0,R)\times(0,\infty)$, para todo $R>0$?
- Suponiendo que
$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}},$$
muestra que
$$\lim_{R\to\infty}\int_0^R \frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Puntuación:
1/2 punto cada cuestión, 2 puntos la teoría, 2 puntos cada problema.
Todas las respuestas deben estar correctamente justificadas.