$$Lx(t) = a_n(t)x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)x^{(1)} + a_0(t).$$

$a_0, a_1, a_2, \ldots a_n \in C([\alpha, \beta])$, $a_n(t) \neq 0$, en $[\alpha, \beta]$ todo

1. $\exists$ n funciones $X_1, X_2, \ldots, X_n$ de clase $C^n([\alpha, \beta])$ tal que toda solución X en $[\alpha, \beta]$ de $LX = 0$, se escribe como

$$X = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \cdots + \alpha_n X_n, \text{ en } [\alpha, \beta]$$

para algunos $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. Además, $X_1, X_2, \ldots X_n$ son linealmente independientes en $C([\alpha, \beta])$.

2. Si $a_j(t) \equiv a_j$, $\forall j = 0, \ldots, n-1$ $(a_n \neq 0)$, $a_j \in \mathbb{R}$.

$$LX = a_n x^{(n)} + a_{n-1} x^{(n-1)} + \cdots + a_1 x^{(1)} + a_0.$$

$$X = e^{zt}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

$$X^{(1)} = z e^{zt}, \quad X^{(2)} = z^2 e^{zt}, \ldots,$$

$$\ldots X^{(n-1)} = z^{n-1} e^{zt}, \quad X^{(n)} = z^n e^{zt}$$

$$L(e^{zt}) = e^{zt}\left[a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0\right]$$

$$P(\xi) = a_n \xi^n + a_{n-1} \xi^{n-1} + \dots + a_1 \xi + a_0$$

es el polinomio característico asociado a el operador L. Por tanto, si $P(z) = 0$, $X = e^{zt}$ es solución de $LX = 0$, en $\mathbb{R}$.

Además, si $P(z) = P^{(1)}(z) = \dots = P^{(r-1)}(z) = 0$, y $P^{(r)}(z) \neq 0$, algebraicamente se puede comprobar que $e^{zt}, te^{zt}, \dots, t^{r-1}e^{zt}$ son también soluciones de $LX = 0$, en $\mathbb{R}$.

Este método permite construir una base de soluciones a valores reales de $LX = 0$, en (α, β).

(3)

$$\boxed{L\bar{X} = F \text{ en } (\alpha, \beta)}$$

Sea $\bar{X}_p$ una solución particular de $L\bar{X} = F$ en $[\alpha, \beta]$. Entonces cualquier otra se escribe como

$$\bar{X} = \bar{X}_p + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \bar{X}_j, \quad \alpha_j \in \mathbb{R}.$$

¿Cómo encontrar $\bar{X}_p$?

$$\bar{X}_p = \alpha_1(t)\bar{X}_1 + \alpha_2(t)\bar{X}_2 + \cdots + \alpha_n(t)\bar{X}_n.$$

$$\bar{X}_p^{(1)} = \alpha_1(t)\bar{X}_1^{(1)} + \alpha_2(t)\bar{X}_2^{(1)}(t) + \cdots + \alpha_n(t)\bar{X}_n^{(1)}$$

$$\bar{X}_p^{(2)} = \alpha_1(t)\bar{X}_1^{(2)} + \alpha_2(t)\bar{X}_2^{(1)} + \cdots + \alpha_n(t)\bar{X}_n^{(2)}$$

$\vdots$

$$\bar{X}_p^{(n-1)} = \alpha_1(t)\bar{X}_1^{(n-1)} + \alpha_2(t)\bar{X}_2^{(n-1)} + \cdots + \alpha_n(t)\bar{X}_n^{(n-1)}.$$

$$\bar{X}_p^{(n)} = \alpha_1(t)\bar{X}_1^{(n)} + \alpha_2(t)\bar{X}_2^{(n)} + \cdots + \alpha_n(t)\bar{X}_n^{(n)} + \sum^{n} \alpha_j^{(1)}(t)\bar{X}_j^{(n-1)}.$$

$$\begin{cases} \alpha_1^{(1)} \overline{X}_1 + \alpha_2^{(1)} \overline{X}_2 + \cdots + \alpha_n^{(1)} \overline{X}_n = 0 , \text{ en } (\alpha, \beta) \\ \alpha_1^{(1)} \overline{X}_1^{(1)} + \alpha_2^{(1)} \overline{X}_2^{(1)} + \cdots + \alpha_n^{(1)} \overline{X}_n^{(1)} = 0. \\ \vdots \\ \alpha_1^{(1)} \overline{X}_1^{(n-2)} + \alpha_2^{(1)} \overline{X}_2^{(n-2)} + \cdots + \alpha_n^{(1)} \overline{X}_n^{(n-2)} = 0 \end{cases}$$

"Una condición más es necesaria" pues sólo hay $n-1$ hasta ahora

Por álgebra:

$$L \overline{X}_p =$$

$$= a_n(t) \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j^{(1)}(t) \overline{X}_j^{(n-1)} \right)$$

y queremos que $L \overline{X}_p = F$ en (α, β),

que requiere que:

$$\alpha_1^{(1)} \overline{X}_1^{(n-1)} + \alpha_2^{(1)} \overline{X}_2^{(n-1)} + \cdots + \alpha_n^{(1)} \overline{X}_n^{(n-1)} = \frac{F(t)}{a_n(t)}$$

en $[\alpha, \beta]$