MATEMATICAS GENERALES I. 1ª RELACION

1. Hallar $L(f,P)$ y $U(f,P)$ en cada uno de los siguientes casos:

(i) $f(x) = 2x\ ,\ x \in [0,1]\ ;\ P = \{\ 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1\ \}$

(ii) $f(x) = 1 - x\ ,\ x \in [0,2]\ ;\ P = \{\ 0, \frac{1}{3}, \frac{3}{4}, 1, 2\ \}$;

(iii) $f(x) = x^2\ ,\ x \in [-1,0]\ ;\ P = \{\ -1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, 0\ \}$

(iv) $f(x) = 1 - x^2\ ,\ x \in [0,1]\ ;\ P = \{\ 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1\ \}$

(v) $f(x) = 1 + x^3\ ,\ x \in [0,1]\ ;\ P = \{\ 0, \frac{1}{2}, 1\ \}$

2. Explicar la razón por la que cada una de las siguientes afirmaciones ha de ser falsa. Tomar P como una partición de $[-1,1]$.

(i) $L(f,P) = 3$ y $U(f,P) = 2$.

(ii) $L(f,P) = 3$,$U(f,P) = 6$ y $\int_{-1}^{1} f(x)\ dx = 2.$;

(iii) $L(f,P) = 3$,$U(f,P) = 6$ y $\int_{-1}^{1} f(x)\ dx = 10.$

3. Suponiendo que $P = \{\ x_0, x_1 \cdots, x_n\ \}$ es una partición de $[a,b]$, hallar $L(f,P)$ y $U(f,P)$ si $f(x) = 1 + 2x$. Utilizar la respuesta anterior para evaluar

$$\int_a^b (1+2x)\ dx$$

4. Suponiendo que

$$\int_0^1 f(x)\ dx = 6, \int_0^2 f(x)\ dx = 4, \int_2^5 f(x)\ dx = 1,$$

hallar cada una de las siguientes integrales:

$$\int_0^5 f(x)\ dx, \int_1^2 f(x)\ dx, \int_1^5 f(x)\ dx, \int_0^0 f(x)\ dx, \int_2^0 f(x)\ dx, \int_5^1 f(x)\ dx$$

5. Haciendo

$$F(x) = \int_0^x \frac{dt}{t^2+9}$$

hallar $F'(-1),\ F'(0),\ F'(-\frac{1}{2})$.

6. Calcular las siguientes integrales definidas

$$\int_0^1 \sqrt{x}\ dx, \int_1^2 \left(\frac{3}{x^3} + 5x\right)\ dx, \int_2^0 \frac{dx}{(x+1)^2}\ dx,$$

$$\int_0^1 \left(x^{\frac{3}{4}} - 2x^{\frac{1}{2}}\right)\ dx, \int_0^4 (x+1)^{17}\ dx, \int_1^2 \frac{6-t}{t^3}$$

7. Hallar el área bajo la gráfica.

(i) $f(x) = \sqrt{1+x},\ x \in [3,8]$.

(ii) $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}},\ x \in [0,8]$.

(iii) $f(x) = (2x^2+1)^2,\ x \in [0,1]$.

8. Dibujar la región comprendida entre las funciones dadas y hallar su área:

(i) $y = \sqrt{x}\ ,\ y = x^2$.
(ii) $y = -x^2 + 5\ ,\ y = -x + 3$.
(iii) $y = -x^2 + 8\ ,\ y = x^2$.
(iv) $y = 6x - x^2\ ,\ y = 0$.

9. Calcular

$$\int \frac{x^3+1}{x^5}\,dx,\ \int \frac{g'(x)}{g(x)^2}\,dx,\ \int (2ax+b)(ax^2+bx+c)\,dx,\ \int \frac{3x}{(x^2+1)^2}\,dx$$

$$\int \frac{3ax^2-2bx}{\sqrt{ax^3-bx^2}}\,dx,\ \int x^2(1+x^3)^{\frac{1}{4}}\,dx,\ \int \frac{x^{n-1}}{\sqrt{a+bx^n}}\,dx$$

$$\int_0^3 \frac{r}{\sqrt{r^2+16}}\,dr,\ \int_0^a x\sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

10. Calcular

$$\frac{d}{dx}\left(\int_1^{x^2} \frac{dt}{t}\right),\ \frac{d}{dx}\left(\int_0^{1+x^2} \frac{dt}{\sqrt{2t+5}}\right),\ \frac{d}{dx}\left(\int_0^{x^3} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}\right),\ \frac{d}{dx}\left(\int_x^0 f(t)\,dt\right).$$

11. Demostrar que

$$\frac{d}{dx}\left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(t)\,dt\right) = f(g_2(x))g_2'(x) - f(g_1(x))g_1'(x)$$

Calcular utilizando este resultado

$$\frac{d}{dx}\left(\int_x^{x^2} \frac{dt}{t}\right),\ \frac{d}{dx}\left(\int_{1-x}^{1+x} \frac{t-1}{t}\,dt\right).$$

12. Demostrar que si f es continua en $[a,b]$ y

$$\int_a^b |f(x)|\,dx = 0$$

se verifica que $f(x) = 0$ para todo x en $[a,b]$.

13. Supóngase que f y g son continuas en $[a,b]$ y

$$\int_a^b f(x)\,dx > \int_a^b g(x)\,dx$$

Responder a las siguientes cuestiones razonándolas:

(i) ¿Se deduce necesariamente que

$$\int_a^b f(x) - g(x)\,dx > 0\ ?$$

(ii) ¿Se deduce necesariamente que $f(x) > g(x)$ para todo $x \in [a, b]$?.

(iii) ¿Se deduce necesariamente que $f(x) > g(x)$ para al menos un $x \in [a, b]$?.

(iv) ¿Se deduce necesariamente que

$$| \int_a^b f(x)\ dx| > | \int_a^b g(x)\ dx|\ ?.$$

(v) ¿Se deduce necesariamente que

$$\int_a^b |f(x)|\ dx > \int_a^b g(x)\ dx\ ?.$$

(vi) ¿Se deduce necesariamente que

$$\int_a^b |f(x)|\ dx| > \int_a^b |g(x)|\ dx\ ?.$$