**ANALISIS DE VARIAS VARIABLES II. TEMA I. INTEGRACION.**

1.– Demostrar que si R es una suma de Riemann para una funcin $f$ y una particin $P$, entonces

$$L(f,P) \leq R \leq U(f,P).$$

2.– Sea $f : [0,2] \longrightarrow$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in [0,1] \\ 1, & \text{si } x \in [1,2]. \end{cases}$$

Calcular por la definicin

$$\int_0^2 f(x)\, dx.$$

3.– Sea $f : [0,1] \longrightarrow$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \neq \frac{1}{2} \\ 1, & \text{si } x = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Demostrar que $f$ es integrable y que

$$\int_0^1 f(x)\, dx = 0.$$

4.– Utilizar el principio de Cavalieri para demostrar que los volmenes de dos cilindros con la misma base y alturason iguales. (Ver la figura).

5.– Utilizando el principio de Cavalieri, calcular el volumen de la estructura mostrada en la siguiente figura. Cada seccin transversal es un rectngulo de longitud 5 y anchura 3.

6.–
(a) Demostrar informalmente que el volumen del slido de revolucin en la figura es
$$\pi \int_a^b [f(x)]^2 \, dx.$$
(b) Demostrar que el volumen de la figura obtenida al girar la regin bajo la grfica de la parbola $y = -x^2 + 2x + 3$, $-1 \leq x \leq 3$ alrededor del eje $X$ es $\dfrac{512}{15}\pi$.

7.– Sea $f : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow$ definida por
$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in \\ 2y, & \text{si } x \notin . \end{cases}$$
Probar que $f$ no es integrable.

8.– Sea $f : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow$. Utilizar la condicin de Riemann y la continuidad uniforme de $f$ para demostrar que $f$ es integrable.

9.– Demostrar que $(x,y) \in^2$: $x^2 + y^2 = 1$ tiene volumen nulo.

10.– Probar que el plano $XY$ en $^3$ tiene medida tridimensional nula.

11.– Demostrar que $\cap[0,1]$ tiene medida nula.

12.– Debe tener medida nula la frontera de un conjunto?.

13.– Debe tener medida nula la frontera de un conjunto de medida nula?.

14.– Si $A \subset [a,b]$ tiene medida nula en , demostrar que $[a,b] \backslash A$ no tiene medida nula.

15.– Sea
$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$
Demostrar que $f$ es integrable en $[0,1] \times [0,1]$.