Relación 1

1. Haciendo un cambio a coordenadas polares en el plano resolver las ecuaciones (a) $xu_y - yu_x = 0$; (b) $y^{-1}u_y - x^{-1}u_x = x^2 + y^2$.

2. Escribir el laplaciano de $\mathbb{R}^3$ en coordenadas cilíndricas y esféricas.

3. Encontrar la solución del problema de Cauchy

$$\begin{cases} 2u_x + 3u_y = 0 \\ u(x,0) = |x| \end{cases}$$

¿Es u una función de clase $C^1(\mathbb{R}^2)$?. Describir el tipo de singularidades de u_x, allí donde las haya y si las tiene. ¿Qué ocurre con la regularidad de u si reemplazamos $|x|$ por una función $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$? ¿Es posible darle sentido a la fórmula que has encontrado para la solución si $\varphi \in C(\mathbb{R})$? ¿En qué sentido sería en este caso, la función que encuentras, solución de la ecuación $2u_x + 3u_y = 0$?

4. Sea u una función radial en $\mathbb{R}^n$, que se escribe, $u(x) = f(\|x\|)$, para una función f definida en $(0, \infty)$.

(a) Escribir el laplaciano de u en función de las derivadas de f.

(b) Escribir el bilaplaciano de u en función de las derivadas de f. (El bilaplaciano $\Delta^2 u$ se define como $\Delta(\Delta u)$).

(c) Determinar todas las soluciones radiales de $\Delta u = 0$ y $\Delta^2 u = 0$ en $\mathbb{R}^3$.

5. Determinar la solución $u(x,t)$ del problema

$$\begin{cases} u_{xx} = 0, \quad 0 < x < 1, y > 0 \; ; \\ u(0,y) = y^2, \quad u(1,y) = 1, \quad y > 0 \, . \end{cases}$$

6. Determinar la solución general de la ecuación $u_{xy} + 3u_x = 1$.

7. Determinar la solución general de la ecuación, $xu_{xx} - 4u_{xy} = 0$, haciendo el cambio de variable $\tau = y$, $\xi = y + 4 \log x$.

8. Hallar la solución de la ecuación

$$u_y + cu_x = 0, \qquad u(x,0) = e^{-x^2} \, .$$

9. Resolver los problemas de Cauchy

1. $u_x + u_y = u^2$, $u(x,0) = h(x)$.
2. $xu_x + yu_y + u_z = u$, $u(x,y,0) = h(x,y)$.
3. $xu_y - yu_x = u$, $u(x,0) = h(x)$.

Si h es analítica ¿Qué nos dice el teorema de Cauchy-Kowalevski?

10. Mostrar que la solución al problema de Cauchy

$$\begin{cases} uu_x + u_y = 0 \\ u(x,0) = h(x) \end{cases} ,$$

es la solución implícita de la ecuación

$$u = h(x - uy) \, .$$

11. Encontrar las soluciones a los siguientes problemas de Cauchy de orden uno:

(a) $u_x + u_y = u^2$, $u(x,0) = h(x)$.

(b) $xuu_x - u_y = 0$, $u(x,0) = x$

(*Respuesta*: La solución está dada implícitamente por la ecuación, $x = ue^{-yu}$)

(c) $xu_y - yu_x = u$, $u(x,0) = h(x)$.

(*Respuesta*: $u(x,y) = h\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) e^{\arctan(y/x)}$.)