

## RELACIÓN 2: MATRICES. DETERMINANTES.

1. Calcular las siguientes operaciones de matrices:

$$(i) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$(ii) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$(iii) -5 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. Comprobar que las matrices  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  cumplen:

(i)  $(A + B)^2 \neq A^2 + B^2 + 2AB.$

(ii)  $(A - B)^2 \neq A^2 + B^2 - 2AB.$

(iii)  $(A + B)(A - B) \neq A^2 - B^2.$

¿Por qué no se dan las igualdades?

3. Sea la matriz  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ . Calcular  $A^n$ , para  $n \in \mathbb{N}$  y hallar  $A^{350} - A^{250}$ .

4. (i) Encontrar una matriz  $X$  que verifique la igualdad  $A \cdot B - X = A^2$ , siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(ii) Calcular el determinante de  $X$ .

(iii) Calcule, si es posible, la inversa de  $X$ .

5. Sean las matrices  $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ .

(i) Determinar para qué valores de "a" no existe la inversa de la matriz  $A \cdot B$ .

(ii) Calcular la inversa de la matriz  $B \cdot B^t$ , siendo  $B^t$  la traspuesta de  $B$ .

6. Sea la matriz  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

(i) Calcular la matriz inversa de  $A$ .

(ii) Calcular  $A^{25}$ .

7. Determinar para qué valores del parámetros  $a$  la matriz  $A = \begin{pmatrix} a & 9 & 4 \\ 4 & a & -1 \\ 7 & 7 & 7 \end{pmatrix}$  no

tiene inversa.

8. Hallar todas las matrices  $X$  tales que  $AX = BX + C$ , siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 5 & 2 & 10 \end{pmatrix}.$$

9. Dada  $A = \begin{pmatrix} 0 & = & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ , comprobar que  $A^{-1} = A^t$  y calcular  $(A^t A)^{500}$ .

10. Calcular los determinantes de las siguientes matrices:

(i)  $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$     (ii)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}$     (iii)  $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$   
(iv)  $\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$     (v)  $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}$     (vi)  $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}$

11. Calcular los determinantes de las siguientes matrices:

(i)  $\begin{pmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 5 & 9 & 2 \\ 7 & 8 & 4 \end{pmatrix}$     (ii)  $\begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 7 & 8 & 4 \end{pmatrix}$     (iii)  $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(iv)  $\begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$     (v)  $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 7 & 6 & 2 \\ 4 & 8 & 7 \end{pmatrix}$     (vi)  $\begin{pmatrix} 9 & 4 & 3 \\ 8 & 3 & 2 \\ 7 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

12. Se consideran las matrices  $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 7 & 6 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 7 & 6 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ . ¿Qué relación existe entre sus determinantes? ¿Por qué?

13. Se consideran las matrices  $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 7 & 6 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ . ¿Qué relación existe entre sus determinantes? ¿Por qué?

14. Se consideran las matrices  $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 7 & 6 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 2 & 6 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ . ¿Qué relación existe entre sus determinantes? ¿Por qué?

15. Se consideran las matrices  $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 7 & 6 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 9 & 8 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ . ¿Qué relación existe entre sus determinantes? ¿Por qué?

16. Se consideran las matrices  $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 7 & 6 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 6 & 7 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ . ¿Qué relación existe entre sus determinantes? ¿Por qué?

17. Calcular los determinantes de las siguientes matrices:

$$\begin{array}{ll}
\text{(i)} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \text{(ii)} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \\
\text{(iii)} \begin{pmatrix} a+1 & a & a & a \\ a & a+1 & a & a \\ a & a & a+1 & a \\ a & a & a & a+1 \end{pmatrix} & \text{(iv)} \begin{pmatrix} 3 & x & x & x \\ x & 3 & x & x \\ x & x & 3 & x \\ x & x & x & 3 \end{pmatrix} \\
\text{(v)} \begin{pmatrix} x+1 & -1 & 0 \\ -1 & x+1 & 0 \\ 0 & 0 & x+1 \end{pmatrix} & \text{(vi)} \begin{pmatrix} x+1 & 0 & -1 \\ 0 & x+2 & 1 \\ -1 & 1 & x+2 \end{pmatrix} \\
\text{(vii)} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 8 & 0 \\ -4 & 7 & 4 & 0 \\ 8 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} & \text{(viii)} \begin{pmatrix} -1 & a & a \\ 0 & -2-b & -1-b \\ 0 & 2+2b & 1+2b \end{pmatrix}
\end{array}$$

18. Probar que  $\begin{vmatrix} 1 & \cos x & \cos 2x \\ \cos x & \cos 2x & \cos 3x \\ \cos 2x & \cos 3x & \cos 4x \end{vmatrix} = 0$  para cada  $x$ .

19. Demostrar que  $x = 2$  es solución de la ecuación  $\begin{vmatrix} x & 4 & 2 \\ 3-x & x & 1 \\ 1 & 1+x & x \end{vmatrix} = 0$  y calcular todas las soluciones de la ecuación.