Relación 2

1. Fijado c, las rectas $x + ct =$ cte. y $x - ct =$ cte. son las características de un problema de ondas. Llamamos paralelogramo característico a todo paralelogramo cuyos lados sean rectas características. Sea $u\colon \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función de clase $C^2(\Omega)$ y tal que

$$u(A) + u(C) = u(B) + u(D),$$

para cada paralelogramo característico contenido en Ω, donde A, C y B, D son pares de vértices opuestos.

Probar que u verifica la ecuación de ondas $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$.

Sugerencia: Tomar $A = (x, t)$ y $C = (x, t + 2h)$, desarrollar con el polinomio de Taylor y hacer tender h a cero.

2. (a) Un triángulo característico es el que tiene un lado en la recta $t = 0$ y los otros dos son rectas características. Sea $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ y calcular

$$\int\int_T (u_{tt} - c^2 u_{xx})\, dx\, dt$$

si T es un triángulo característico contenido en Ω.

Sugerencia: Utilizar el teorema de Green

$$\int\int_D (Q_x - P_t)\, dxdt = \int_{\partial D} Pdx + Qdt$$

y observar que $(c^2 dt, dx) = \mp c(dx, dt)$, en las rectas $x \pm ct =$ cte.

(b) Sea R un paralelogramo característico y u una función de clase $C^2(\overline{R})$. Calcular

$$\int\int_R (u_{tt} - c^2 u_{xx})\, dx\, dt$$

en función de $u(A), u(B), u(C)$ y $u(D)$.

3. Soluciones radiales de la ecuación de ondas en 3-d: Consideramos la ecuación

$$c^2 \triangle - u_{tt} = 0$$

en tres dimensiones espaciales. Si u es una solución radial, $u(x, y, z, t) = w(\rho, t)$, $\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$, escribir la ecuación que tiene que verificar w.

Hacer el cambio de variable dependiente, $W = \rho w$ y encontrar la solución general para la ecuación que verifica W. Deshacer los cambios para determinar todas las soluciones radiales de la ecuación original.

4. Si u es de clase C^m y satisface la ecuación de ondas, $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$, todas sus derivadas hasta el orden $m - 2$ también la satisfacen, ¿por qué?

Supongamos que u es la solución del problema de Cauchy para los datos iniciales $u(x, 0) = 0, u_t(x, 0) = g(x)$, $g \in C^\infty(\mathbb{R})$. ¿De qué problemas de Cauchy son soluciones u_t y u_x?

Comprobar que los resultados son válidos en cualquier número de dimensiones espaciales, reemplazando u_{xx} por Δu en la ecuación.

5. Sea $v \in C^2(\mathbb{R}\times(0,+\infty)$ una solución de la ecuación de ondas, $v_{tt}-c^2 v_{xx} = 0$, en $\mathbb{R}\times(0,+\infty)$. Se fija un valor $T>0$ y se considera el problema de Cauchy

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0\,, \quad x \in \mathbb{R}\ ,\ t>0 \\ u(x,0) = v(x,T)\,, \quad u_t(x,0) = v_t(x,T)\,, \quad x \in \mathbb{R}\,. \end{cases}$$

¿Cuál es su solución? Interpretar el resultado.

6. Resolver el problema de Cauchy para la ecuación de ondas

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0\,, & x \in \mathbb{R},\ t>0\,, \\ u(x,0) = f(x)\,, & x \in \mathbb{R}\,, \\ u_t(x,0) = g(x)\,, & x \in \mathbb{R}\,, \end{cases}$$

en los siguientes casos:
1. $f(x) = e^{-|x|}$, $g(x) = 0$.
2. $f(x) = \sin \omega\, x$, $g(x) = \cos \mu\, x$.
3. $f(x) = 0$, $g(x) = 1$ si $|x| \le \epsilon$, $g(x) = 0$ si $|x| > \epsilon$.

Estudiar la regularidad de la solución (continuidad de u y de sus derivadas) en cada caso.

7. Resolver el problema de Cauchy para la ecuación de ondas no homogénea

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = F(x,t)\,, & x \in \mathbb{R},\ t>0\,, \\ u(x,0) = f(x)\,, & x \in \mathbb{R}\,, \\ u_t(x,0) = g(x)\,, & x \in \mathbb{R}\,, \end{cases}$$

en los siguientes casos:
1. $F(x,t) = 1$, $f(x) = \sin \omega\, x$, $g(x) = 0$.
2. $f(x) = g(x) = 0$, $F = 1$ en el primer cuadrante y $F = 0$ en el resto.
3. $F(x,t) = x$, $f(x) = x^3$, $g(x) = x^2$.

Resolver el problema 8 sin utilizar el método de reflexiones.

8. Se considera el problema

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0\,, & x>0\,, t>0\,, \\ u(x,0) = f(x)\,, & x>0\,, \\ u_t(x,0) = g(x)\,, & x>0\,, \\ u_x(0,t) = h(t)\,, & t>0\,. \end{cases}$$

Determinar las condiciones necesarias y suficientes que deben cumplir los datos, f, g y h para que la solución sea de clase C^2 en $\{(x,t) : x \ge 0, t \ge 0\}$.

9. Dar la solución explícita del problema

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0\,, & x>0\ ,\ t>0\ , \\ u(x,0) = f(x)\,, & x>0\,, \\ u_t(x,0) = g(x)\,, & x>0\,, \\ u(0,t) = h(t)\,, & t>0\,. \end{cases}$$

con los siguientes datos:
1. $f(x) = x^2$, $g(x) = 0$, $h(t) = 0$.
2. $f(x) = e^{-x}$, $g(x) = 1$, $h(t) = 1$.

3. $f(x) = g(x) = 0$, $h(t) = A \sin \omega\, t$.

Estudiar la continuidad de u y de sus derivadas de orden menor o igual que dos en los tres casos.

En los siguientes problemas encontrar la solución hasta la altura $\frac{l}{c}$ y estudiar, en su caso, la propagación de las singularidades.

10.

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0\,, & 0 < x < \pi,\ t > 0 \\ u(x,0) = u_t(x,0) = 0\,, & 0 < x < \pi\,, \\ u(0,t) = \sin(c\,t)\,, & t > 0\,, \\ u_x(\pi,t) = 0\,, & t > 0\,. \end{cases}$$

Sugerencia: Utilizar que $\cos x \sin(ct)$ es solución de $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$ en $\mathbb{R}^2$, estudiar la ecuación que cumple $v = \sin(ct)\cos x - u$ y usar el método de reflexiones para calcular v.

11.

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0\,, & 0 < x < l,\ t > 0\,, \\ u(x,0) = x/l\,, & 0 < x < l\,, \\ u_t(x,0) = 0\,, & 0 < x < l\,, \\ u(0,t) = u_x(l,t) = 0\,, & t > 0\,. \end{cases}$$

12. Determinar para $0 < t < 2$ la solución del problema

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & 0 < x < 2, t > 0\,, \\ u(x,0) = 0, & 0 < x < 2\,, \\ u_t(x,0) = 1 - 2x, & 0 < x < 2\,, \\ u(0,t) = t,\ u(2,t) = 0, & t > 0\,. \end{cases}$$

Estudiar la continuidad de $u(x,t)$ y $u_x(x,t)$ para $t = 1$.

13. Usando el método de las características, calcular los valores de $u(x, \frac{1}{2})$ en $[0,1]$, si u es la solución continua del problema

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 \quad \text{si } 0 < x < 1\ ,\ t > 0 \\ u(x,0) = 1 \quad \text{si } 0 < x < 1 \\ u_t(x,0) = \sin^3 \pi x \quad \text{si } 0 < x < 1 \\ u_x(0,t) = 0 \quad \text{si} \quad t > 0 \\ u_x(1,t) = 0 \quad \text{si } t > 0\ . \end{cases}$$

Sugerencia: $\sin^3 x = \sin x \sin^2 x$.

14. Determinar la solución del problema

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & x > 0,\ 0 < t < 2x\,, \\ u(x,0) = f(x), & x > 0\,, \\ u_t(x,0) = g(x), & x > 0\,, \\ u(x,2x) = h(x), & x > 0\,. \end{cases}$$

Estudiar el caso particular en que, $f(x) = g(x) \equiv 0$, $h(x) = A \sin \omega x$ y determinar las singularidades de la solución. Aquí no funciona el método de reflexiones, es necesario usar otro método.

15. Reducir el problema

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & \text{si } 0 < x < 1 \ , \ t > 0 \\ u(x,0) = 0 & \text{si } 0 < x < 1 \\ u_t(x,0) = 0 & \text{si } 0 < x < 1 \\ u(0,t) = \alpha(t) & \text{si } \ t > 0 \\ u(1,t) = \gamma(t) & \text{si } t > 0 \ , \end{cases}$$

a otro problema, pero con condiciones de contorno de Dirichlet nulas en la frontera lateral.