ANALISIS DE VARIAS VARIABLES II. TEMA III.
INTEGRALES SOBRE SUPERFICIES.

1 - Hallar la ecuacin del plano tangente a las siguientes superficies en los puntos indicados. Decir en qu puntos son suaves las superficies:
(a) $x = 2u$, $y = u^2 + v$, $z = v^2$, en $(0, 1, 1)$. $\quad (SOL : z - 2y + 1 = 0)$
(b) $x = u^2 - v^2$, $y = u + v$, $z = u^2 + 4v$, en $(-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 2)$. $\quad (SOL : 4x + z - 1 = 0)$

2 - Identificar las siguientes superficies y calcular su vector normal unitario asociado:
(a) $x = \cos v \sin u$, $y = \sin v \sin u$, $z = \cos u$; $u \in (0, \pi)$, $v \in [0, 2\pi]$.
$(SOL : \vec{n} = (\cos v \sin u, \sin v \sin u, \cos u))$
(b) $x = \sin v$, $y = u$, $z = \cos v$; $0 \leq v \leq 2\pi$, $-1 \leq u \leq 3$. $\quad (SOL : \vec{n} = (-\sin v, 0, -\cos v))$

3 - Parametrizar las siguientes superficies:
(a) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + z^2 = 1$
(b) $x^2 + y^2 = z^2$; $0 \leq z \leq 1$
(c) $x^2 + y^2 - z^2 = 25$
(d) $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6y = 12$

4 - Dada una esfera de radio 2 con centro en el origen, hallar la ecuacin del plano tangente a ella en el punto $(1, 1, \sqrt{2})$, considerndola como:
(a) una superficie parametrizada por: $\phi(\theta, \varphi) = (2\cos\theta \sin\varphi, 2\sin\theta \sin\varphi, 2\cos\varphi)$
(b) una superficie de nivel de $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$
(c) la grfica de $g(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ $\quad \big(SOL : x + y + \sqrt{2}z = 4\big)$

5 - Hallar la ecuacin del plano tangente a cada superficie en el punto indicado:
(a) $z = 3x^2 + 8xy$; $x = 1$, $y = 0$ $\quad (SOL : 6x + 8y - z = 3)$
(b) $x^3 + 3xy + z^2 = 2$; $x = 1$, $y = \frac{1}{3}$ $\quad (SOL : 4x + 3y = 5)$

6 - Sea la curva $y = f(x)$ $(f(x) \geq 0)$, $a \leq x \leq b$. Mostrar que:
(a) El rea de la superficie barrida al girar la curva alrededor del eje OX es:

$$2\pi \int_a^b f(u) \sqrt{1 + [f'(u)]^2}\, du$$

(b) El rea de la superficie barrida al girar la curva alrededor del eje OY es:

$$2\pi \int_a^b u \sqrt{1 + [f'(u)]^2}\, du$$

7 - (a) Comprobar que la superficie $x = \frac{1}{\sqrt{z^2+y^2}}$, $1 \leq x < +\infty$, se puede rellenar pero no se puede pintar.
(b) Hacer lo mismo con la superficie obtenida al hacer girar la grfica de la funcin $f(x) = \frac{1}{x}$, $1 \leq x < +\infty$ alrededor del eje OX.

8 - Calcular el rea de las siguientes superficies:

(a) $\phi(u,v) = ((a + b\cos u)\sin v, (a + b\cos u)\cos v, b\sin u)$, $0 < b < a$, $0 \leq u \leq 2\pi$, $0 \leq v \leq 2\pi$.

$\left(SOL : 4\pi^2 ab\right)$

(b) La parte superior del cilindro $z^2 + y^2 = R^2$, comprendida entre los planos $z = mx$, $z = nx$, $m > n > 0$. $\left(SOL : 2R^2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right)\right)$

(c) $\phi(u,v) = (u - v, u + v, uv)$, $D = \{(u,v)/u^2 + v^2 \leq 1\}$ $\left(SOL : \frac{\pi}{3}(6\sqrt{6} - 8)\right)$

9 - Calcular las siguientes integrales de superficie de funciones escalares:

(i) $\int_S xy\, dS$; S es el tetaedro de lados $z = 0, y = 0, x = y, x + z = 1$ $\left(SOL : \frac{5\sqrt{2}+3}{24}\right)$

(ii) $\int_S z\, dS$; S es la superficie $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ $\left(SOL : \pi a^3\right)$

(iii) $\int_S xyz\, dS$; S es el tringulo de vrtices $(1,0,0), (0,2,0), (0,1,1)$ $\left(SOL : \frac{\sqrt{6}}{30}\right)$

(iv) $\int_S z\, dS$; S es la superficie $z = x^2 + y^2$, con $x^2 + y^2 \leq 1$ $\left(SOL : \frac{\pi}{4}\left(\frac{5\sqrt{5}}{3} + \frac{1}{15}\right)\right)$

(v) $\int_S \frac{1}{(1+x+y)^2}\, dS$; S es el tetaedro de lados $x + y + z = 1, x = 0, y = 0, z = 0$

$\left(SOL : \frac{3-\sqrt{3}}{2} + (\sqrt{3} - 1)Ln2\right)$

(vi) $\int_S (x + y + z)\, dS$; S es la frontera de $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2, z \leq 0$ $\left(SOL : -\pi a^3\right)$

(vii) $\int_S z^2\, dS$; S es el cubo centrado en el origen y de lado 2 $\left(SOL : \frac{40}{3}\right)$

10 - Cunto se diferencian las integrales:

$$I_1 = \int_{S_1} (x^2 + y^2 + z^2)\, dS, \quad I_2 = \int_{S_2} (x^2 + y^2 + z^2)\, dS$$

siendo S_1 la esfera de centro cero y radio a y S_2 el octaedro de ecuacin $|x| + |y| + |z| = a$ inscrito en la esfera. $\left(SOL : (4\pi - 2\sqrt{3})a^4\right)$

11 - Calcular las siguientes integrales de superficie de funciones vectoriales:

(i) $\int_S (x^2, y^2, z^2) \cdot dS$; S es la cara exterior de la esfera $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$

$\left(SOL : \frac{8\pi}{3}(a + b + c)R^3\right)$

(ii) $\int_S (0,0,z) \cdot dS$; S es la cara exterior del elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ $\left(SOL : \frac{4\pi}{3} abc\right)$

(iii) $\int_S (y - z, z - x, x - y) \cdot dS$; S es la cara exterior de $x^2 + y^2 = z^2$, $0 \leq z \leq h$ $(SOL : 0)$

(iv) $\int_S (\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}) \cdot dS$; S es la cara exterior del elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

$\left(SOL : \frac{4\pi}{abc}(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2)\right)$

(v) $\int_S (1, 1, z(x^2 + y^2)^2) \cdot dS$; S es la frontera del cilindro $x^2 + y^2 \leq 1$, con $0 \leq z \leq 1$ $(SOL : 0)$

(vi) $\int_S (2x, 2y, 2z) \cdot dS$; S es la frontera del volumen dado por $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$, $z \geq 0$ $(SOL : 4\pi)$

(vii) $\int_S \vec{r}ot\, F \cdot dS$; siendo $\vec{F}(x,y,z) = (y, -x, zx^3y^2)$ y S la superficie $x^2 + y^2 + 3z^2 = 1$ con $z \leq 0$

y la normal apuntando hacia el interior. $(SOL : -2\pi)$