Relación 3

1. Se define la función error

$$\mathrm{e}\,(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-s^2}\, ds\,.$$

Expresar en términos de esta función, la solución al problema de valores iniciales para la ecuación del calor en la recta y con dato inicial:

1. $f(x) = 1$ si $|x| \leq 1$, $f(x) = 0$ si $|x| > 1$;
2. $f(x) = e^{-x}$ si $x > 0$, $f(x) = 0$ si $x < 0$.

2. Sea v la solución del problema

$$\begin{cases} v_t - v_{xx} = 0\,, & x \in \mathbb{R}\,,\ t > 0\,, \\ v(x,0) = f(x)\,, & x \in \mathbb{R}\,, \end{cases}$$

Expresar en función de v la solución del problema

$$\begin{cases} u_t - c^2 u_{xx} = 0\,, & x \in \mathbb{R}\,,\ t > 0\,, \\ u(x,0) = f\left(\frac{x-x_0}{h}\right)\,, & x \in \mathbb{R}\,, \end{cases}$$

donde c y h son positivos y $x_0 \in \mathbb{R}$.

3. ¿Qué se puede decir de la solución del problema

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0\,, & x \in \mathbb{R}\,,\ t > 0\,, \\ u(x,0) = f(x)\,, & x \in \mathbb{R}\,, \end{cases}$$

si f tiene alguna de las siguientes propiedades: (i) es par; (ii) es impar; (iii) es par respecto de l; (iv) es impar respecto de l; (v) es periódica de periodo m ?

Estudiar las preguntas análogas para la solución del problema

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = F(x,t)\,, & x \in \mathbb{R}\,,\ t > 0\,, \\ u(x,0) = 0\,, & x \in \mathbb{R}\,, \end{cases}$$

4. Sea $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$, una solución de la ecuación de ondas $u_{tt} - u_{xx} = 0$. Se define la función

$$v(x,t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x,s) e^{-s^2/4t}\, ds\,.$$

Probar que v verifica la ecuación del calor $v_t - v_{xx} = 0$ en $\mathbb{R}^2$.

5. Encontrar una fórmula para la solución del problema

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0\,, & x > 0,\ t > 0\,, \\ u(x,0) = f(x)\,, & x > 0\,, \\ u(0,t) = h(t)\,, & t > 0\,, \end{cases}$$

en los siguientes casos:

(a) $f(x) = 1$, $h(t) = 0$.
(b) $f(x) = 0$, $h(t) = 1$.

6. Escribir una fórmula que dé la solución del problema

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = \sin x \ , & x \in \mathbf{R} \ , \ t > 0 \ , \\ u(x,0) = 0 \ , & x \in \mathbf{R} \ . \end{cases}$$

7. Escribir una fórmula que dé una solución del problema

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 \, , & 0 < x < l \, , \ t > 0 \, , \\ u(x,0) = f(x) \, , & 0 < x < l \, , \\ u(0,t) = 0 \, , \ u_x(l,t) = 0 & t > 0 \, . \end{cases}$$

8. Demostrar que $\int_0^l u^2(x,t)\,dx$ es una función decreciente en t si u es solución de

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 \, , & 0 < x < l \, , \ t > 0 \, , \\ u(x,0) = f(x) \, , & 0 < x < l \end{cases}$$

y verifica condiciones laterales de Dirichlet o Neumann nulas. Utilizar este razonamiento para probar unicidad de solución en el problema del ejercicio anterior.

9. Mostrar que existe una constante, $C = C(\epsilon, R, \alpha, \beta) > 0$, tal que

$$|\partial_x^\alpha \partial_t^\beta G(x-y,t)| \le C e^{-y^2/C} \ , \text{ si } |x| \le R \ , \ \epsilon \le t \le R$$

y $0 \le \alpha + \beta \le 1$. Concluir que

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}} G(x-y,t) f(y)\,dy \ ,$$

está en $C^\infty(\mathbb{R} \times (0,+\infty))$, si $f \in L^p(\mathbb{R})$, para algún $p \ge 1$.

10. Comprobar que la función

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} g^{(k)}(t) \frac{x^{2k}}{(2k)!} \quad , \quad g(t) = e^{-1/t^2} \ ,$$

es C^∞ en $\mathbb{R} \times [0,+\infty)$, verifica la ecuación del calor en $\mathbb{R} \times (0,+\infty)$ y

$$|u(x,t)| \le N e^{\frac{Nx^2}{t} - \frac{1}{Nt}} \ \text{ si } x \in \mathbb{R} \text{ y } t > 0 \ .$$

En particular, $u(\,\cdot\,,0) \equiv 0$. ¿Porqué no contradice este ejemplo al teorema de unicidad que hemos enunciado en clase?

Sugerencia: Utilizar la fórmula de Cauchy, para escribir la derivada k-esima de $g(t)$ en términos de la integral de $g(z) = e^{-1/z^2}$, sobre una circunferencia centrada en t y con radio $t/2$ y para mostrar que existe $N \ge 1$, tal que

$$|g^{(k)}(t)| \le N \left(2^k k!/t^k\right) e^{-1/Nt^2} \ , \text{ si } t > 0 \ .$$

De la formula de Stirling podéis concluir que, $\frac{k!^2}{(2k)!} \le N^{1+k}$, si $k \ge 1$.