ANALISIS DE VARIAS VARIABLES II. TEMA I.
TEOREMA DE FUBINI.

1.– Cambiar el orden de integracin y evaluar

$$\int_0^2 \int_{\frac{y}{2}}^1 (x+y)^2 \, dx \, dy.$$

2.– Cambiar el orden de integracin y evaluar

$$\int_0^2 \int_{y^{\frac{1}{2}}}^1 (x^2 + y^3 x)^2 \, dx \, dy.$$

3.– Hallar $\int\int_D y[1 - cos(\frac{\pi x}{4})] \, dx \, dy$, donde D es la regin en la siguiente figura.

4.– Evaluar las siguientes integrales. Esbozar e identificar el tipo de la regin correspondiente.

(i)$\int_0^{\pi} \int_{\sin x}^{3 \sin x} x(1+y) \, dy \, dx.$

(ii) $\int_0^1 \int_{x-1}^{x \cos \frac{\pi x}{2}} (x^2 + xy + 1) \, dy \, dx.$

(iii) $\int_{-1}^1 \int_{y^{\frac{2}{3}}}^{(2-y)^2} (y\sqrt{x} + y^3 - 2y) \, dx \, dy.$

(iv) $\int_0^2 \int_{-\frac{3\sqrt{4-x^2}}{2}}^{\frac{3\sqrt{4-x^2}}{2}} \left(\dfrac{5}{\sqrt{2+x}} + y^3 \right) dy \, dx.$

(v)$\int_0^1 \int_0^{x^2} (x^2 + xy - y^2) \, dy \, dx.$

(vi)$\int_2^4 \int_{y^2-1}^{x} 3 \, dy \, dx.$

(vii)$\int_0^1 \int_{x^2}^{x} (x+y)^2 \, dy \, dx.$

(viii)$\int_0^1 \int_0^{3y} \exp x + y \, dx \, dy.$

5.– Integrar la funcin dada f sobre la regin D en los siguientes casos:

(i) $f(x,y) = x - y$; D es el tringulo con vrtices $(0,0)$, $(1,0)$, $(2,1)$.

(ii)$f(x,y) = x^2 + 2xy + 2$; D es la regin acotada por la grfica de $y = -x^2 + x$, el eje X y las rectas $x = 0$ y $x = 2$.

6.– Calcular las siguientes integrales iteradas:

(i)$\int_{-1}^1 \int_0^1 (x^4 y + y^2) \, dy dx \quad \left(SOL : \frac{13}{15}\right)$

(ii)$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 (y\cos x + 2)\, dydx \quad \left(SOL : \pi + \frac{1}{2}\right)$

(iii)$\int_0^1 \int_0^1 (xye^{x+y})\, dydx \quad (SOL : 1)$

(iv)$\int_{-1}^0 \int_1^2 (-x \log y)\, dydx \quad \left(SOL : \log 2 - \frac{1}{2}\right)$

(v)$\int_0^1 \int_0^{x^2} \, dydx \quad \left(SOL : \frac{1}{3}\right)$

(vi)$\int_0^1 \int_{x^3}^{x^2} y\, dydx \quad \left(SOL : \frac{1}{35}\right)$

(vii)$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\cos x} (y \sin x)\, dydx \quad \left(SOL : \frac{1}{6}\right)$

(viii)$\int_{-1}^1 \int_{-2|x|}^{|x|} e^{x+y}\, dydx \quad \left(SOL : \frac{e^2}{2} + \frac{1}{e} + \frac{1}{3e^3} - \frac{5}{6}\right)$

7.$-$ Sea $D = \{(x,y) \in^2, a \leq x \leq b, -\phi(x) \leq y \leq \phi(x)\}$, donde $\phi(x)$ es una funcin no negativa y continua en $[a,b]$. Sea $f(x,y)$ definida y continua en D tal que $f(x,y) = -f(x,-y)$ para todo $(x,y) \in D$. Probar que

$$\int_D f(x,y)dxdy = 0.$$

8.$-$ Colocar los lmites de integracin, en ambos rdenes, para los siguientes recintos:
(i) Tringulos de vrtices $(0,0),(1,0),(1,1)$ y $(0,0),(2,1),(-2,1)$.
(ii) Trapecio de vrtices $(0,0),(1,0),(1,2),(0,1)$.
(iii) Crculos $x^2 + y^2 \leq 1$ y $x^2 + y^2 \leq y$.
(iv) Anillo $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$.
(v) $y - 2x \leq 0,\ 2y - x \geq 0,\ xy \leq 2$.

9.$-$ Cambiar el orden de integracin en las integrales dobles:

(i) $\int_0^1 \int_{x^3}^{x^2} f(x,y)\, dy\, dx$.

(ii) $\int_0^{2a} \int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x,y)\, dy\, dx$.

(iii) $\int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{\frac{4-x^2}{2}}}^{\sqrt{\frac{4-x^2}{2}}} f(x,y)\, dy\, dx$.

(iv) $\int_1^2 \int_x^{2x} f(x,y)\, dy\, dx$.

(v) $\int_0^1 \int_0^{x^2} f(x,y)\, dy\, dx \ + \ \int_1^3 \int_0^{\frac{3-x}{2}} f(x,y)\, dy\, dx$.

(vi) $\int_1^e \int_0^{\log x} f(x,y)\, dy\, dx$.

10.$-$

(i) Sean $D = [a,b] \times [c,d]$, f continua en $[a,b]$ y g continua en $[c,d]$. Probar que

$$\int_D [f(x)g(y)] \ dxdy = \left[\int_a^b f(x)dx\right] \left[\int_c^d g(y)\, dy\right].$$

(ii) El resultado sigue siendo cierto si $D = \{(x,y) \in^2, a \leq x \leq b, \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x)\}$?.

($\phi_1, \phi_2 : [a,b] \longrightarrow$ son continuas.)

11.− Calcular las siguientes integrales:

(i)$\int_0^4 \int_{y/2}^2 e^{x^2}\, dxdy \quad \big(SOL : e^4 - 1\big)$

(ii)$\int_0^1 \int_{\arctan y}^{\pi/4} (\sec x)^5\, dxdy \quad \big(SOL : \frac{1}{5}(4\sqrt{2} - 1)\big)$

(iii)$\int_{[0,\pi]\times[0,1]} |y - \sin x|\, dxdy. \quad (SOL : \pi - 2)$

12.− Sea $D = [0,1]$x$[0,1]$. Calcular $\displaystyle\int_D xy\, dxdy$ utilizando la definicin. $\big(SOL : \frac{1}{4}\big)$

13.−

(i) Sea $D = [0,1] \times [0,1]$. Probar que

$$\frac{1}{2}(1 - \cos 1) \leq \int_D \frac{\sin x}{1 + (xy)^4}\, dx\, dy \leq 1.$$

(ii) Sea $D = [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$. Probar que

$$\frac{1}{e} \leq \frac{1}{4\pi^2} \int_D e^{\sin(x+y)}\, dx\, dy \leq e.$$

14.− Probar que:

$$\int_0^x \left[\int_o^t F(u)\, du\right] dt = \oint_0^x (x - u)F(u)\, du.$$

15.− Calcular las siguientes integrales iteradas:

(i)$\int_0^1 \int_1^2 \int_2^3 \cos[\pi(x + y + z)]\, dx\, dy\, dz \quad (SOL : 0)$

(ii)$\int_0^1 \int_0^x \int_0^y (y + xz)\, dz\, dy\, dx \quad \big(SOL : \frac{7}{60}\big)$

(iii)$\int_0^2 \int_0^x \int_0^{x+y}\, dz\, dy\, dx \quad (SOL : 4)$

(iv)$\int_0^1 \int_0^z \int_0^y xy^2 z^3\, dx\, dy\, dz \quad \big(SOL : \frac{1}{90}\big)$

(v)$\int_0^1 \int_0^y \int_0^{\frac{x}{\sqrt{3}}} \frac{x}{x^2+z^2}\, dz\, dx\, dy \quad \big(SOL : \frac{\pi}{12}\big)$

(vi)$\int_1^2 \int_1^z \int_{\frac{1}{y}}^2 yz^2\, dx\, dy\, dz \quad \big(SOL : \frac{49}{20}\big)$

16.−

(i) Sea W un conjunto acotado cuya frontera est formada por grficas de funciones continuas. Supongamos que W es simetrico respecto del plano XY, es decir: si $(x,y,z) \in W$ entonces, $(x,y,-z) \in W$. Sea $f(x,y,z)$ continua sobre W y tal que $f(x,y,z) = -f(x,y,-z)$. Probar que

$$\int_W f(x,y,z)\, dV = 0.$$

(ii) Utilizar (i) para probar que $\int_W (1+x+y)dV = 4\pi/3$, donde W es la bola unitaria de centro $(0,0)$.

17.− Cambiar el orden de integracin en las siguientes integrales:

(i) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{x+y} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$

(ii) $\displaystyle\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$

(iii) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^1 \int_0^{x^2+y^2} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$

18.− Calcular las siguientes integrales en los recintos que se indican:

(i) $\displaystyle\int_W \frac{dx\,dy\,dz}{(1+x+y+z)^3}$; W limitado por los planos $1 = x+y+z, x = 0, y = 0, z = 0$.

$$\left(SOL : \tfrac{Ln2}{2} - \tfrac{5}{16}\right)$$

(ii)$\int\int\int_W x^2 \cos z\,dx\,dy\,dz$; W es la regin acotada por $z = 0$, $z = \pi y = 0$, $y = 1$, $x = 0$, $x + y = 1$.

(iii)$\int\int\int_W 1 - z^2\,dx\,dy\,dz$; W es la pirmide con vrtice superior en $(0,0,1)$ y vrtices de la base en $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(1,1,0)$.