Relación 4

Escribir la solución utilizando el método de separación de variables.

1.

$$\begin{cases} u_t - \alpha\, u_{xx} = 0, & 0 < x < l,\ t > 0, \\ u(0,t) = u(l,t) = 0, & t > 0, \\ u(x,0) = T, & 0 < x < l\,. \end{cases}$$

α es una constante positiva. ¿Cuál es el límite de la solución cuando t tiende a infinito?

2.

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & 0 < x < \pi,\ t > 0, \\ u(0,t) = T_1, \quad u(\pi,t) = T_2, & t > 0, \\ u(x,0) = x(\pi - x), & 0 < x < \pi\,. \end{cases}$$

¿Cuál es el límite de la solución cuando t tiende a infinito?

3.

$$\begin{cases} u_t - \alpha\, u_{xx} = 0, & 0 < x < l,\ t > 0, \\ u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0, & t > 0, \\ u(x,0) = \sin^2 \dfrac{\pi\, x}{l}, & 0 < x < l. \end{cases}$$

¿Cuál es el límite de la solución cuando t tiende a infinito?

4.

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 2\, e^{3x}, & 0 < x < 1/2,\ t > 0, \\ u(0,t) = u(1/2,t) = 0, & t > 0, \\ u(x,0) = \frac{2}{9}(1 - e^{3x}), & 0 < x < 1/2\,. \end{cases}$$

Sugerencia: Encontrar primero una solución estacionaria, es decir, una función independiente de t que satisface la ecuación y las condiciones de contorno; restarla de u y resolver el problema que queda.

5.

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = x\, \cos t, & 0 < x < 1,\ t > 0, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & t > 0, \\ u(x,0) = 0, & 0 < x < 1\,. \end{cases}$$

6.

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 1, & 0 < x < \pi,\ t > 0, \\ u(0,t) = 1,\ u_x(\pi,t) = \pi, & t > 0, \\ u(x,0) = 1 - \dfrac{x^2}{2}, & 0 < x < \pi\,. \end{cases}$$

Sugerencia: Encontrar primero una solución estacionaria como en el problema **??**.

7.

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & 0 < x < \pi,\ t > 0, \\ u(x,0) = \sin 2x, & 0 < x < \pi, \\ u_t(x,0) = 1, & 0 < x < \pi, \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, & t > 0\,. \end{cases}$$

8.

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & 0 < x < 1,\ t > 0, \\ u(x,0) = x, & 0 < x < 1, \\ u_t(x,0) = 0, & 0 < x < 1, \\ u(0,t) = u_x(1,t) = 0, & t > 0\,. \end{cases}$$

9.

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & -\pi < x < \pi,\ t > 0, \\ u(x,0) = \sin 7x - \sin 3x, & -\pi < x < \pi, \\ u_t(x,0) = 0, & -\pi < x < \pi, \\ u(-\pi,t) = u(\pi,t) = 0, & t > 0\,. \end{cases}$$

10.

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 50 \sin 5t \sin 5x, & 0 < x < \pi,\ t > 0, \\ u(x,0) = 0, & 0 < x < \pi, \\ u_t(x,0) = 0, & 0 < x < \pi, \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, & t > 0\,. \end{cases}$$

11. Encontrar todas las soluciones en variables separadas de la ecuación de ondas con rozamiento

$$u_{tt} + 2\,k\,u_t - c^2 u_{xx} = 0\ ,$$

con las condiciones de contorno $u(0,t) = 0,\ u(\pi,t) = 0$.

12. Vamos a aplicar el método de separación de variables para resolver el problema

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & 0 < x < 1,\ t > 0, \\ u(0,t) = 0, & t > 0, \\ u(1,t) + u_x(1,t) = 0, & t > 0, \\ u(x,0) = f(x), & 0 < x < 1\,. \end{cases}$$

Probar primero que existe una sucesión μ_n de números positivos, que tiende a infinito, y una sucesión asociada de funciones φ_n, de modo que la solución del problema se escribe en la forma

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\ e^{-\mu_n^2 t}\ \varphi_n(x)\,.$$

Probar que las funciones φ_n son ortogonales en $(0,1)$. Aceptando que forman un sistema ortogonal completo, ¿cómo se calculan los coeficientes b_n?