

MATEMATICAS GENERALES I. 5ª RELACION

1. Cada una de las siguientes series converge. Hallar su suma

$$1. \sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{(k+1)(k+2)} \quad 2. \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+3)(k+4)} \quad 3. \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+2)(2k+2)}$$

$$4. \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3}{10^k} \quad 5. \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{5^k} \quad 6. \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k + 4^k}{5^k} \quad 7. \sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}}$$

$$8. \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{k+3}} \quad 9. \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{k+3}}{3^k}$$

2. En lo que sigue escribir cada fracción decimal como serie infinita y expresar la suma como el cociente de dos enteros:

$$1. 0,777\dots \quad 2. 0,2424\dots \quad 3. 0,112112112\dots \quad 4. 0,624545\dots$$

3. Usando series, demostrar que todo decimal periódico representa un número racional (cocientes de dos enteros).

4. Demostrar que

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = l \quad \text{si y solo si} \quad \sum_{k=j+1}^{\infty} a_k = l - (a_0 + a_1 + \dots + a_j)$$

5. Utilizando la serie geométrica probar lo siguiente:

$$1. \frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k \quad \text{para } |x| < 1$$

$$2. \frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k} \quad \text{para } |x| < 1$$

6. Hallar un desarrollo en serie para

$$1. \frac{x}{1+x^2} \quad \text{válida para } |x| < 1$$

$$2. \frac{1}{1+4x^2} \quad \text{válida para } |x| < 1/2$$

7. ¿A qué hora entre las 4 y las 5, señalan minuterero y horario el mismo punto de la esfera?. Expresar la respuesta como serie geométrica.

8. Una bola abandonada desde una altura de  $h$  metros rebota hasta una altura de  $\sigma h$  metros, donde  $\sigma$  es una constante positiva menor que uno. Hallar la distancia total recorrida por la bola si se dejó caer inicialmente desde una altura de  $h_0$  metros.

9. Indicar si las siguientes series son convergentes o divergentes:

1.  $\sum \frac{k}{k^3 + 1}$  2.  $\sum \frac{1}{3k + 2}$  3.  $\sum \frac{1}{k^k}$  4.  $\sum \frac{e^k}{k!}$  5.  $\sum \frac{1}{k2^k}$
6.  $\sum \left(\frac{k}{2k+1}\right)^k$  7.  $\sum \frac{1}{(2k+1)^2}$  8.  $\sum \frac{\log k}{k}$  9.  $\sum \frac{1}{\sqrt{k+1}}$
10.  $\sum \frac{1}{\log k \log(k+1)}$  11.  $\sum \frac{2^{k-1}}{(k+1)(k+2)}$  12.  $\sum \frac{1}{k^2 + 1}$
13.  $\sum \frac{1}{1 + 2 \log k}$  14.  $\sum k \left(\frac{2}{3}\right)^k$  15.  $\sum \frac{k}{(k+1)(2k+1)(4k+1)}$
16.  $\sum \frac{k!}{10^k}$  17.  $\sum \frac{k!}{10^{4k}}$  18.  $\sum \frac{k^2}{e^k}$  19.  $\sum \frac{\sqrt{k}}{k^2 + 1}$  20.  $\sum \frac{2^k k!}{k^k}$
21.  $\sum \frac{k!}{(k+2)!}$  22.  $\sum \frac{1}{k} \left(\frac{1}{\log k}\right)^{3/2}$  23.  $\sum \frac{1}{k} \left(\frac{1}{\log k}\right)^{1/2}$
24.  $\sum \frac{1}{\sqrt{k^3 - 1}}$  25.  $\sum \left(\frac{k}{k+100}\right)^k$  26.  $\sum \frac{(k!)^2}{(2k)!}$  27.  $\sum k^{-(1+\frac{1}{k})}$
28.  $\sum \frac{11}{1 + 100^{-k}}$  29.  $\sum \frac{\log k}{e^k}$  30.  $\sum \frac{1}{1 + \sqrt{k}}$  31.  $\sum \frac{\log k}{k^2}$

10. Sea  $\sum a_k$  una serie cuyos términos son no negativos y sea  $\{c_k\}$  una sucesión de números positivos que converge a un número positivo  $c$ . Demostrar que  $\sum a_k$  es convergente sí y sólo si  $\sum c_k a_k$  es convergente.

Indicación: existe un entero  $k_0$  tal que  $\frac{c}{2} \leq c_k \leq \frac{3c}{2}$  para todo  $k \geq k_0$ .

11. Estudiar si las series siguientes son convergentes o absolutamente convergentes:

1.  $1 + (-1) + 1 + \dots + (-1)^k + \dots$  2.  $\frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \frac{1}{8} - \frac{1}{10} + \dots + \frac{(-1)^k}{2k} + \dots$
3.  $\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{3}{4} - \frac{4}{5} + \dots + (-1)^k \frac{k}{k+1} + \dots$  4.  $\frac{1}{2 \log 2} - \frac{1}{3 \log 3} + \dots + (-1)^k \frac{1}{k \log k} + \dots$
5.  $\sum (-1)^k \frac{\log k}{k}$  6.  $\sum (-1)^k \frac{k}{\log k}$  7.  $\sum \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k!}\right)$  8.  $\sum \frac{k^3}{2^k}$
9.  $\sum (-1)^k \frac{1}{2k+1}$  10.  $\sum (-1)^k \frac{(k!)^2}{(2k)!}$  11.  $\sum \frac{k!}{(-2)^k}$  12.  $\sum \sin\left(\frac{k\pi}{4}\right)$
13.  $\sum \sin\left(\frac{\pi}{4k^2}\right)$  14.  $\sum \frac{(-1)^k}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}}$  15.  $\sum (-1)^k \frac{k}{k^2 + 1}$
16.  $\sum \frac{(-1)^k}{\sqrt{k(k+1)}}$  17.  $\sum \left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)$