ANALISIS DE VARIAS VARIABLES II. TEMA I.
INTEGRALES DOBLES Y TRIPLES.

1.– Sean $A = [0,1] \times [0,2]$ y $g(u,v) = (3u+v,\ u-v)$. Calcular la imagen B del rectngulo mediante la transformacin lineal y calcular, utilizando el cambio de variable, la siguiente integral

$$\int_B \sin(x+y)\,dx\,dy.$$

2.– Sean $T(u,v) = (x(u,v), y(u,v)) = (4u, 2u+3v)$, $D^* = [0,1]\times[1,2]$. Hallar $D = T(D^*)$. Utilizar este cambio de variables para integrar sobre D las funciones $f(x,y) = xy$ y $g(x,y) = x-y$.

3.– Repetir el ejercicio anterior con $T(u,v) = (x(u,v), y(u,v)) = (u^2-v^2, 2uv)$, $D^* = \{(u,v)/u^2+v^2 \leq 1, u \geq 0, v \geq 0\}$,$f(x,y) = 1$, $g(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

4.– Calcular las siguientes integrales en los recintos que se indican:

i) $\int_D (2a-x)^{-1/2}\,dx\,dy$, donde D es el dominio limitado por el arco pequeo de la circunferencia de centro (a,a) y radio a y los ejes coordenados.

ii) $\int_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,dx\,dy,\ D = \{(x,y) \in^2 /x^2+y^2 \leq 1, x,y \geq 0\}$.

iii) $\int_D e^{-(x^2+y^2+xy)}\,dx\,dy,\ D = \{(x,y) \in^2 /x^2+y^2+xy \leq 1\}$.

iv) $\int_D e^{\frac{y-x}{y+x}}\,dx\,dy,\ D = \{(x,y) \in^2 /0 \leq x, 0 \leq y, x+y \leq 2\}$.

v) $\int_D (x^2+y^2)^{\frac{-3}{2}}\,dx\,dy,\ D = \{(x,y) \in^2 /x \leq y, x+y \geq 1, x^2+y^2 \leq 1\}$.

vi) $\int_D (x^2+y^2)\,dx\,dy$, D es la regin en el primer cuadrante limitada por las curvas $xy = 1,\ xy = 3,\ x^2-y^2 = 1,\ x^2-y^2 = 4$.

vii) $\int_D y\,dx\,dy$, D el recinto limitado por el eje de abcisas y el arco de cicloides

$$f(x) = \begin{cases} x = R(t-\sin t), & \text{si } 0 \leq t \leq 2\pi \\ y = R(1-\cos t), & \text{si } 0 \leq t \leq 2\pi. \end{cases}$$

5.– Calcular el rea de los recintos limitados por

i) La lemniscata $(x^2+y^2)^2 = 2a^2(x^2-y^2)$.

ii) La cardioide $r = a(1+\cos\theta)$.

iii) $\left(x^2+y^2\right)^2 \leq 2a^2\left(x^2-y^2\right),\ x^2+y^2 \geq a^2$.

iv) Las curvas $y^2 = a^3x,\ y^2 = b^3x,\ x^2 = c^3y,\ x^2 = d^3y$, con $0 < a < b,\ 0 < c < d$.

6.– Calcular los volmenes limitados por:

i) $x^2+2y^2 = 2,\ z = 0,\ x+y+2z = 2$

ii) $z = x^2 + y^2,\ z = 10 - x^2 - 2y^2$

iii) $z = 0,\ z = \cos x \cos y, |x + y| \leq \pi/2, |x - y| \leq \pi/2$

7.− Una placa de oro D est definida por $0 \leq x \leq 2\pi, 0 \leq y \leq \pi$ (cm.), y tiene una densidad de masa $\rho(x, y) = y^2 \sin^2(4x) + 2\,(g/cm^2)$. Si el oro cuesta 7 dlares. por gramo, cunto vale el oro de la placa?.

8.− Hallar los momentos de inercia respecto de los ejes coordenados de la figura limitada por la curva $(x - a)^2 + (y - a)^2 = a^2$, con $0 \leq x \leq a,\ 0 \leq y \leq a$, siendo la densidad constante igual a 1.

9.− Hallar las coordenadas del centro de gravedad de una lmina circular $x^2 + y^2 \leq a^2$, si su densidad en un punto (x, y) es proporcional a la distancia de dicho punto al punto $(a, 0)$.

10.−

i) Hallar el rea de la parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ comprendida en el interior del cilindro $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $(b \leq a)$.

ii) Hallar el rea de la parte de la superficie $x^2 + y^2 = ax$ cortada por la superficie $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

iii) Hallar el rea de la superficie del slido limitado por $z = x^2 + y^2$ y $x^2 + y^2 + z^2 = 2$, e interior a la primera.

12.− Hallar la masa de una lmina circular de radio R si su densidad en un punto (x, y) es proporcional a la distancia del punto al centro de la lmina e igual a δ en el borde de la misma.

13.− Sean $f : (0, +\infty) \longrightarrow$ continua y $W = \{(x, y, z) \in^3 / x^2 + y^2 + z^2 \leq \rho^2\}$. Probar que

$$\int_W f\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)\, dx\, dy\, dz = 4\pi \int_0^\rho f(r) r^2\, dr.$$

14.− Calcular los volmenes de los slidos limitados por:

i) $x^2 + y^2 = z,\ x^2 + y^2 + z^2 = 2$.

ii) $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$ y $x = 0,\ y = 0,\ z = 0$.

iii) $az = a^2 - x^2 - y^2,\ z = a - x - y,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0$, siendo a positivo.

iv) $x^2 + y^2 = 2ax,\ z = 0,\ x^2 + y^2 = z^2$.

v) $x^2 + y^2 + z^2 = R^2,\ (x^2 + y^2)^2 = R^2(x^2 - y^2),\ x \geq 0$.

vi) $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2,\ x^2 + y^2 + (z - R)^2 \leq R^2$.

vii) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} \leq 2,\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leq \dfrac{z^2}{c^2}$.

viii) $z = \dfrac{x^2}{2p} + \dfrac{y^2}{2q},\ x = a,\ y = b,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0$.

ix) $z = x^2 + y^2,\ x^2 + y^2 = x,\ x^2 + y^2 = 2x,\ z = 0$

x) $x^2 + y^2 - az = 0,\ \left(x^2 + y^2\right)^2 = a^2\left(x^2 - y^2\right),\ z = 0$

xi) $x^2 + y^2 + z^2 = a^2,\ x^2 + y^2 + z^2 = b^2,\ x^2 + y^2 = z^2,\ z \geq 0,\ 0 < a < b.$

xii) $z = x^2 - y^2,\ z = 0,\ x = 3.$

xiii) $x^2 + y^2 + z^2 = a^2,\ x^2 + y^2 = ax.$

xiv) $x^2 + z^2 = a^2,\ x + y = a,\ x + y = -a,\ x - y = a,\ x - y = -a.$

xv) $x^2 + y^2 \leq \frac{1}{5}z^2, 0 \leq z \leq 5 + \sqrt{5 - x^2 - y^2}$ (cono de helado).

xvi) La interseccin de dos cilindros de radio 1 que se cortan perpendicularmente.

15.− Calcular las siguientes integrales en los recintos que se indican:

i) $\int_W xyz\, dx\, dy\, dz$, W limitado por los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ y la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

ii) $\int_W \frac{dx\, dy\, dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$, W limitado por las esferas $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ y $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$, con $0 < a < b$.

iii) $\int_W x^2\, dx\, dy\, dz$, siendo W el siguiente conjunto
$W = \{(x, y, z) \in^3, x \geq 0, x^2 + y^2 + (z-1)^2 \leq 1, 4z^2 \geq 3(x^2 + y^2)\}$.

iv) $\int_W zy\sqrt{x^2 + y^2}\, dx\, dy\, dz$, siendo W el siguiente conjunto
$W = \{(x, y, z) \in^3, 0 \leq z \leq x^2 + y^2, 0 \leq y \leq \sqrt{2x - x^2}\}$.

v) $\int_W z^2\, dx\, dy\, dz,$, siendo W el siguiente conjunto
$W = \{(x, y, z) \in^3, x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, x^2 + y^2 + z^2 \leq 2Rz\}$.

vi) $\int_W ze^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy\, dz$, siendo W el siguiente conjunto
$W = \{(x, y, z) \in^3, 2(x^2 + y^2) \leq z^2 \leq x^2 + y^2 + 1, z \geq 0\}$.

vii) $\int_W (x^2 + y^2 + z^2)\, dx\, dy\, dz$, siendo W el siguiente conjunto
$W = \{(x, y, z) \in^3, 2az \geq x^2 + y^2, x^2 + y^2 + z^2 \leq 3a^2\}$.

viii) $\int_W \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right) dx\, dy\, dz$, donde W es el elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$.

ix) $\int_W z\, dx\, dy\, dz$, W en el primer octante y limitado por los planos $y = 0, z = 0, x + y = 2, 2y + x = 6$ y el cilindro $y^2 + z^2 = 4$.

x) $\int_W (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}}\, dx\, dy\, dz$, $W = \{(x, y, z) \in^3, \frac{1}{2} \leq z \leq 1, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.

16.– Hallar el centro de masa del cilindro $x^2 + y^2 \leq 1, 1 \leq z \leq 2$, si la densidad es $\rho = (x^2 + y^2)z^2$.

17.– Hallar el momento de inercia alrededor del eje OY para la bola $x^2+y^2+z^2 \leq R^2$ si la densidad de masa es una constante ρ.

18.– Suponer que la densidad en un punto de un slido esfrico de radio R est dada por $(1 + d^3)^{-1}$, donde d es la distancia del punto al centro del slido. Hallar la masa total del slido.

19.– Consideremos el cubo $C = [-1, 1] \times [-1, 1] \times [-1, 1]$, y supongamos que su temperatura en un punto es $32d^2$, con d la distancia del punto al $(0, 0, 0)$.

i) Cul es la temperatura promedio del cubo?

ii) En qu puntos del cubo es la temperatura igual a la temperatura promedio?

20.– Calcular el momento de inercia respecto del eje OZ del slido limitado por

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2,\ x^2 + y^2 = z^2,\ z > 0.$$

21.– La densidad de un slido limitado por la superficie $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ en un punto $P = (x, y, z)$ es proporcional al producto de las distancias de P a los tres planos coordenados. Demustrese que el momento de inercia del slido con respecto al eje OX es $\frac{1}{4}M(b^2 + c^2)$, donde M es la masa del slido.