ANALISIS DE VARIAS VARIABLES II. TEMA IV.
TEOREMAS DE GREEN, STOKES Y GAUSS.

1 - Utilizar el teorema de Green para calcular el rea acotada por:

(a) Un arco de cicloide $x(t) = a(t - \sin t)$, $y(t) = a(1 - \cos t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$, $(a > 0)$ y el eje OX.

$\big(SOL : 3\pi a^2\big)$

(b) La curva $r^2 = 9\sin^2 2\theta$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ (rosa de cuatro ptalos). $\big(SOL : \frac{9\pi}{2}\big)$

2 - Comprobar el teorema de Green en los siguientes casos:

(i) $\vec{F}(x, y) = (2x - y^3)\,\vec{i} - xy\,\vec{j}$, $D = \{(x, y)/1 \leq x^2 + y^2 \leq 9\}$. $(SOL : 60\pi)$

(ii) $\vec{F}(x, y) = (x^2 - y^2, x^2 - 4)$, $D = \{(x, y)/2 \leq x + y \leq 4, x - y \geq 0, x^2 - y^2 \leq 4\}$. $(SOL : 8)$

(iii) $\vec{F}(x, y) = -x^2y\,\vec{i} + xy^2\,\vec{j}$, D es el crculo de centro $(0, 0)$ y radio a. $\Big(SOL : \frac{\pi a^4}{2}\Big)$

(iv) $\vec{F}(x, y) = (x + y)\,\vec{i} - (x - y)\,\vec{j}$, $D = \{(x, y)/\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$. $(SOL : -2\pi ab)$

3 - Calcular $\int_C (e^x \sin y - my)\, dx + (e^x \cos y - m)\, dy$, donde C es la semicircunferencia superior de $x^2 + y^2 = ax$ recorrida desde $A = (a, 0)$ hasta $B = (0, 0)$ utilizando el teorema de Green. $\Big(SOL : \frac{m\pi a^2}{8}\Big)$

4 - Verificar el teorema de Stokes para la helicoide $\phi(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, \theta)$, $(r, \theta) \in [0, 1] \times [0, \frac{\pi}{2}]$ y el campo vectorial $\vec{F}(x, y, z) = (z, x, y)$. $\big(SOL : \frac{\pi}{4}\big)$

5 - Calcular utilizando el teorema de Stokes las siguientes integrales:

(i) $\oint_C zdx + xdy + ydz$, donde C es la curva $x^2 + y^2 = 4$,$z = 0$ recorrida en sentido positivo.

$(SOL : 4\pi)$

(ii) $\oint_C (y^2 + z^2)dx + (z^2 + x^2)dy + (x^2 + y^2)dz$, donde C es la curva dada por $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rx$,

$x^2 + y^2 = 2rx$, $0 < r < R$, $z \geq 0$, recorrida de forma que el recinto menor de la esfera quede

a la izquierda. $\big(SOL : 2\pi Rr^2\big)$

(iii) $\oint_C 2zdx - xdy + 3ydz$, donde C es la curva $1 - z = x^2 + y^2$,$x, y, z \geq 0$ recorrida en sentido

positivo. $\big(SOL : \frac{10}{3} - \frac{\pi}{4}\big)$

(iv) $\int_{AmB} (x^2 - yz)dx + (y^2 - zx)dy + (z^2 - xy)dz$, donde AmB es el arco de hlice $x(t) = a\cos t$,

$y(t) = a\sin t$, $z(t) = \frac{ht}{2\pi}$, que une el punto $A = (a, 0, 0)$ con $B = (a, 0, h)$. $\Big(SOL : \frac{h^3}{3}\Big)$

6 - Sean las superficies S_1 dada por $x^2+y^2=1$, $0 \leq z \leq 1$ y S_2 dada por $x^2+y^2+(z-1)^2=1$, $z \geq 1$, y el campo vectorial $\vec{F}(x,y,z)=(zx+z^2y+x, z^3yx+y, x^2z^4)$. Calcular la integral de superficie de $\vec{r}ot\vec{F}$ a lo largo de la superficie formada por la unin de S_1 y S_2. $\quad (SOL: 0)$

7 - Comprobar que los siguientes campos vectoriales son conservativos y calcular en cada caso $\int_C \vec{F}\cdot ds$.

(a) $\vec{F}(x,y)=(xy^2+3x^2y, (x+y)x^2)$, C es el tringulo de vrtices $(1,1)$, $(0,2)$, $(3,0)$.
$(SOL: 0)$

(b) $\vec{F}(x,y)=(\cos xy^2 - xy^2\sin xy^2, -2x^2y\sin xy^2)$, C es la curva dada por $\vec{\sigma}(t)=(e^t, e^{t+1})$,
$-1 \leq t \leq 0. \quad \big(SOL: \cos(e^2)-e^{-1}\cos(e^{-1})\big)$

(c) $\vec{F}(x,y,z)=(x^3-3xy^2, y^3-3x^2y, z)$, C es la trayectoria que une los puntos $(0,0,0)$,
$(0,0,1)$, $(0,1,1)$, $(1,1,1)$. $\quad \big(SOL: -\frac{1}{2}\big)$

8 - (i) Comprobar que $\oint_C \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=2\pi$, siendo C la circunferencia unidad.

(ii) Es conservativo el campo $\vec{F}(x,y)=(P,Q)=\left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$? Por qu?

(iii) Probar que $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$. Contradice esta igualdad el hecho de que $\vec{F}$ no sea conservativo?
Explicar por qu.

9 - Sea $\vec{F}$ un campo vectorial C^1 en ^{3} con $div\vec{F}=0$. Dar un campo vectorial $\vec{G}$ tal que $\vec{r}ot\vec{G}=\vec{F}$.

10 - Comprobar que $div\vec{F}=0$ y hallar $\vec{G}$ tal que $\vec{r}ot\vec{G}=\vec{F}$, siendo

(a) $\vec{F}(x,y,z)=(xz, -yz, y) \quad \big(SOL: -\frac{1}{2}(yz^2+y^2, xz^2, 0)\big)$

(b) $\vec{F}(x,y,z)=(x\cos y, -\sin y, \sin x) \quad (SOL: -(z\sin y + y\sin x, xz\cos y, 0))$

11 - Sea $\vec{F}(x,y,z)=(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}(x,y,z)$. Probar que $\vec{F}$ es conservativo e incompresible. Calcular su potencial escalar y vectorial.
$\Big(SOL: f(x,y,z)=-(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}+C; \vec{G}=(x^2+y^2)^{-1}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}(yz,-xz,0)\Big)$

12 - Calcular las siguientes integrales utilizando el teorema de Gauss:

(i) $\int_S (ax, by, cz)\cdot dS$, siendo S una superficie cerrada con orientacin exterior y que encierra un
volumen V. $\quad (SOL: V(a+b+c))$

(ii) $\int_S (xy, yz, xz)\cdot dS$, donde S es la cara exterior de $x^2+y^2+z^2=1$, $x,y,z \geq 0$.
$\big(SOL: \frac{3\pi}{16}\big)$

(iii) $\int_S (x^2, y^2, z^2) \cdot dS$, donde S es la cara exterior del cubo $0 \leq x, y, z \leq a$. $\big(SOL : 3a^4\big)$

(iv) $\int_S (y, z, xz) \cdot dS$, siendo S la cara exterior de la frontera de $x^2 + y^2 \leq z \leq 1$, $x \geq 0$. $\quad \big(SOL : \frac{4}{15}\big)$

13 - (i) Sea S una superficie cerrada y $\vec{F}$ un campo vectorial C^2. Calcular la integral de superficie de $\vec{r}ot\vec{F}$. $\quad (SOL : 0)$

(ii) Supongamos que todas las superficies que hay en un dominio Ω de ^{3} son tangentes a un campo vectorial $\vec{F}$ dado. Calcular $\int_\Omega div\vec{F}\, dV$. $\quad (SOL : 0)$

(iii) Sea S una superficie y $\vec{F}$ un campo vectorial que es perpendicular a la tangente a la curva frontera de S.Calcular $\int_S \vec{r}ot\vec{F} \cdot dS$. $\quad (SOL : 0)$